Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

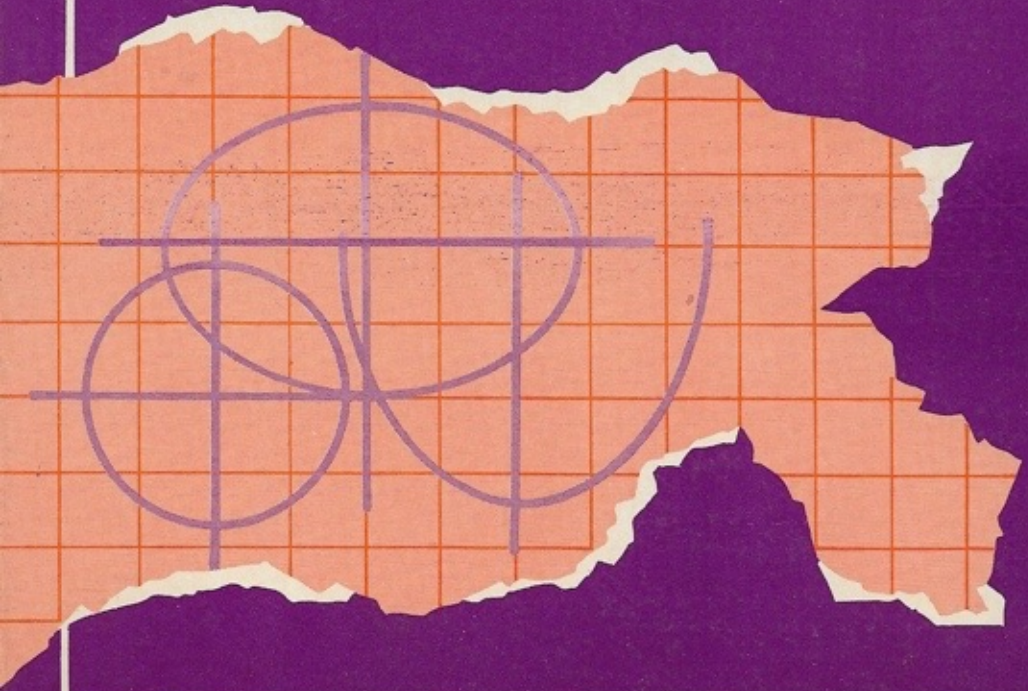
Bloque 6

Geometría analítica

Módulo 8

RELACIONES Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Conrado Flores García



trillas

SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

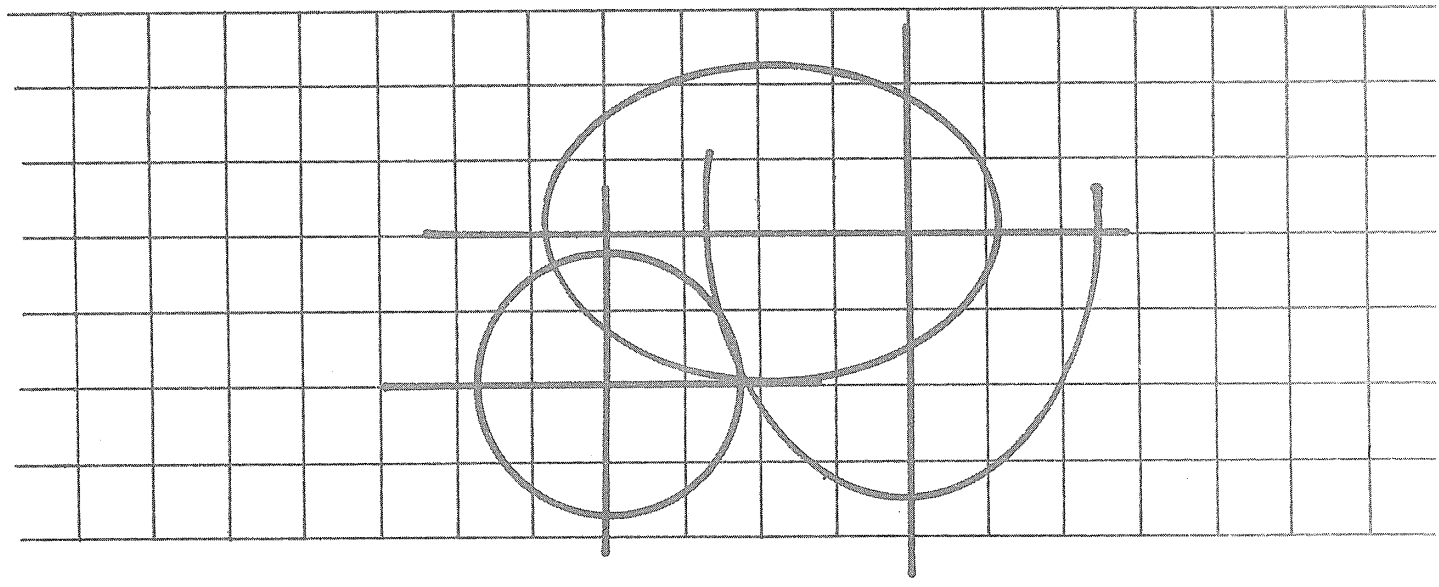
Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

RELACIONES Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. Introducción a la geometría analítica
2. La recta
3. La circunferencia
4. La elipse
5. La hipérbola
6. La parábola
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8. ***Relaciones y lugares geométricos.***

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 6
Geometría analítica

Módulo 8

RELACIONES Y LUGARES GEOMÉTRICOS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

La presentación y disposición en conjunto de
RELACIONES Y LUGARES GEOMÉTRICOS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-0839-3

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

8.1 Extensión de una curva 9

8.2 Relaciónes cualesquiera y funciones 40

8.3 Simetría 44

8.4 Trazo de curvas 53

8.5 Ecuaciones de lugares geométricos 64

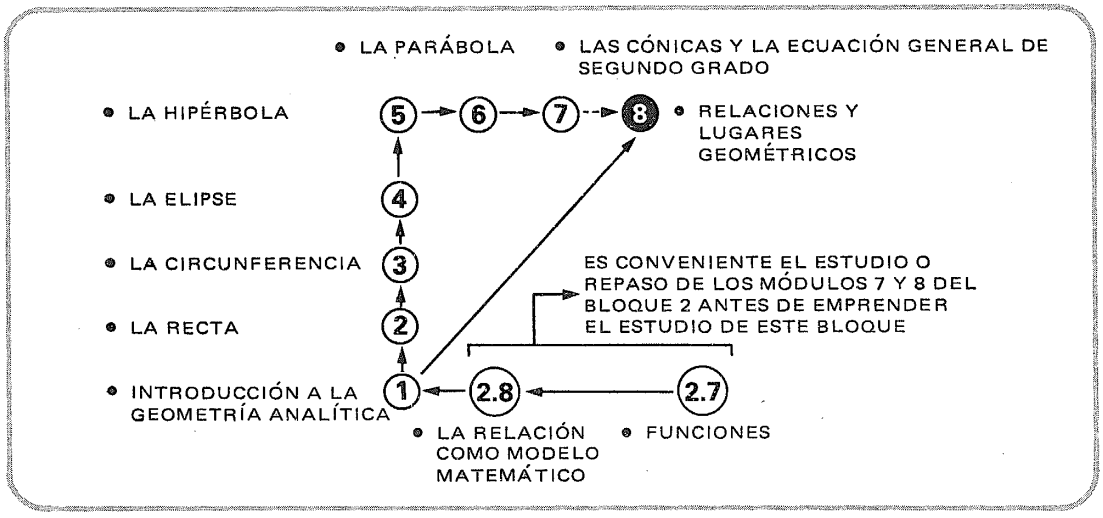
8.6 Gráfica de una desigualdad 73

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 6. Geometría analítica

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades cualesquiera

Esquema estructural del bloque 6



Módulo 8. Relaciones y lugares geométricos

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una secuencia, una desigualdad, o un sistema de ecuaciones de desigualdades

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Resolución de ecuaciones de primer y segundo grados	2	2, 5
• Resolución de desigualdades de primer y segundo grados	2	4, 6
• Relación y función (concepto, elementos y representación gráfica)	2	7, 8
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6

8.1

Extensión de una curva

Sabemos que una expresión como ésta:

$$R = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge \blacksquare\}$$

regla de correspondencia

representa una

relación en $\mathcal{R}^2$.

Como podemos recordar,
una relación es un

conjunto de pares ordenados

que cumplen con las condiciones expresadas
en la regla de correspondencia.

2

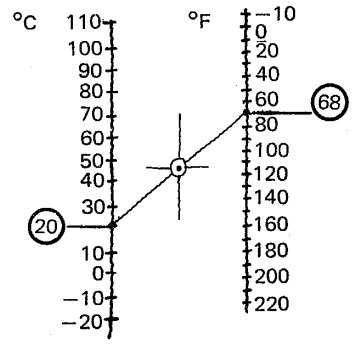
Hemos visto que la expresión de la

regla de correspondencia

puede adoptar muy diversas formas.
Recordemos algunas de ellas.

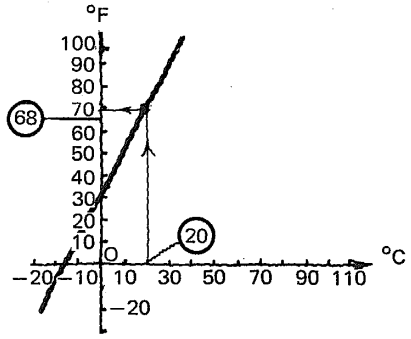
3

Gráfica o nomograma.



4

Gráfica cartesiana.



5

Una tabla

Peso deseado kg	Calorías necesarias
49.900	2 350
54.800	2 550
59.900	2 700
64.900	2 800
69.800	3 000
74.800	3 200
79.800	3 350
84.800	3 500

6

Una lista como ésta:

Consumo en kWh	Precio del kWh
(0, 50)	0, 64
(50, 100)	1. 09
(100, ∞)	1. 97

7

Una ecuación algebraica con dos variables

$$F = 1.8C + 32$$

$$A = \pi r^2$$

$$y = 5 + 2x$$

$$y = -0.12x^2 + 1.2x + 2$$

8

Una ecuación trascendente con dos variables.

$$y = 5 \operatorname{sen} 3x$$

$$2\alpha = \arctan \frac{B}{A - C}$$

$$y = e^{-2x}$$

$$y = \log (x + k)$$

9

Una desigualdad con dos variables:

$$U \geqslant kx - q$$

$$y > ax^2 + bx + c$$

$$y + 3x < 3(x - 2)$$

Etcétera.

10

Nos interesan particularmente
en esta etapa de nuestro estudio
las reglas de correspondencia
expresadas en la forma de

ecuaciones o **desigualdades**

con dos variables.

11

Hemos definido la

gráfica cartesiana de una relación

la regla de correspondencia

$$R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A^2 \wedge \square\}$$

como el conjunto de los puntos
del plano cartesiano
que cumplen con

12

Si la regla de correspondencia
está expresada
en la forma de una ecuación
con dos variables

$$R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A^2 \wedge \boxed{\text{ecuación en x e y}}\}$$

decimos que la

gráfica cartesiana de la ecuación

es el conjunto de puntos cuyas coordenadas
la satisfacen.

13

Podemos interpretar, entonces,
la expresión

gráfica cartesiana de una ecuación

como la gráfica cartesiana
de una relación cuya regla de correspondencia
es dicha ecuación.

14

Se suele dar el nombre de

lugar geométrico

de una ecuación a la

gráfica cartesiana

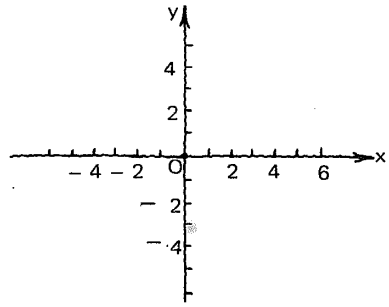
de la ecuación.

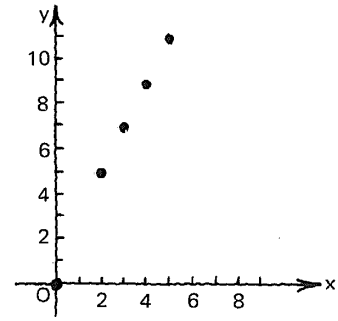
15

Ejemplo.
Dar el lugar geométrico representado por

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$\wedge\ 2 \leqslant x \leqslant 5 \wedge y = 2x + 1\}$





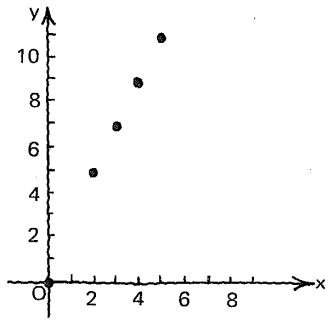
16

Podemos decir que el lugar geométrico representado por la ecuación

$y = 2x + 1$
$x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leqslant x \leqslant 5$

está constituido por

cuatro puntos colineales.

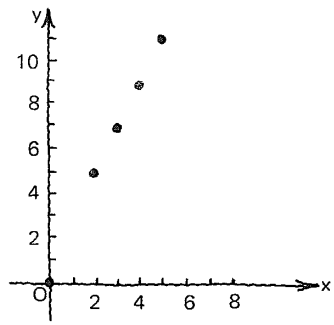


17

Los puntos
(2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)
están en el lugar geométrico de

$y = 2x + 1$
$x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leqslant x \leqslant 5$

porque,
para (2, 5)
$(5) = 2(2) + 1$
$5 = 4 + 1$
$5 = 5 \leftarrow$ PCV
etcétera.



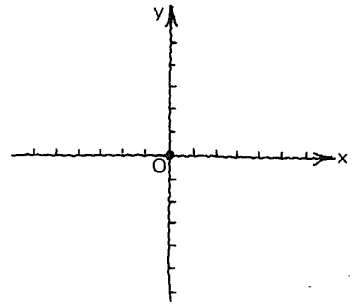
18

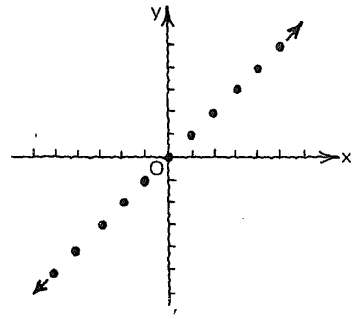
Dar el lugar geométrico representado por

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \wedge \mathbf{y = x}\}$$

o

$$\mathbf{y = x}_{x \in \mathbb{Z}}$$





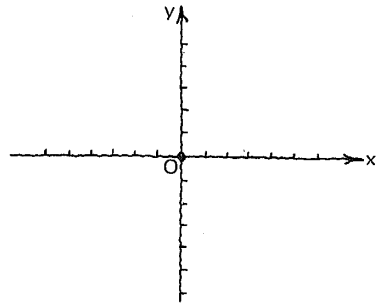
19

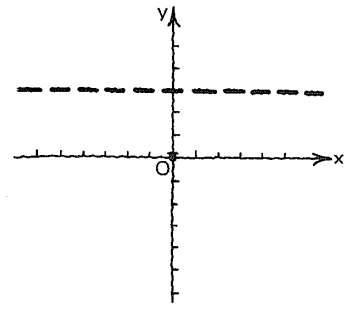
Dar el lugar geométrico representado por

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \wedge \mathbf{y = 3}\}$$

o

$$\mathbf{y = 3}_{y \in \mathbb{Q}}$$





convencionalmente podemos representar esto así

20

En la expresión

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in (A^2) \wedge \blacksquare\}$$

podemos llamar a (A^2) el

producto cartesiano de referencia.

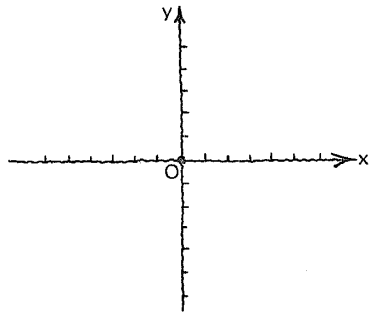
Recordemos que una relación en (A^2) es un subconjunto de este producto cartesiano de referencia.

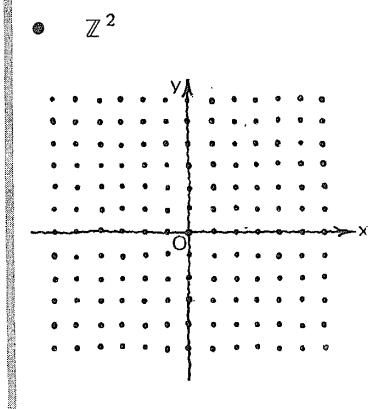
21

Por ejemplo.
El producto cartesiano
de referencia
de la relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \wedge y = x\}$

es ⌊___⌋,
que podemos representar
gráficamente así
(en forma parcial, desde luego).



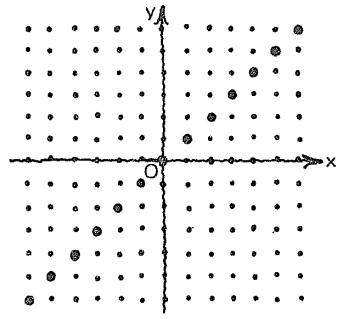


22

El lugar geométrico
o gráfica cartesiana
de la relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \wedge y = x\}$

es un subconjunto de $\mathbb{Z}^2$.



23

Por lo general, consideramos como

producto cartesiano de referencia

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

En este caso, también se suele llamar

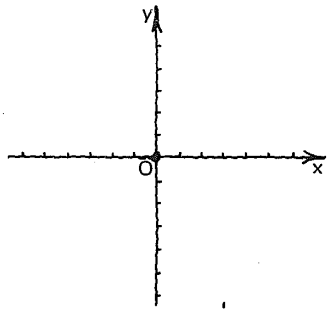
curva

al lugar geométrico.

24

Por ejemplo,
nos pueden pedir
trazar la curva (o el lugar
geométrico, o la gráfica)
representada por

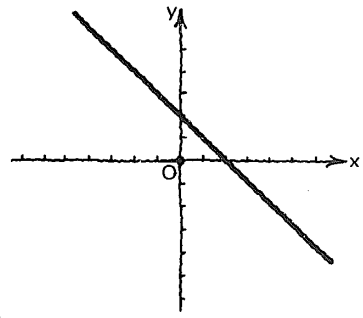
$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \boxed{y = -x + 2}\}$



o bien, por:

$y = -x + 2$
$x, y \in \mathbb{R}$

Completemos el trazo.



Una recta
es un caso
particular de
curva.

25

Sabemos también que
una relación es un conjunto de pares
ordenados

(x, y).

Al conjunto de los primeros componentes **(x)**
de estos pares ordenados le hemos llamado

_____

dominio de la relación.

26

Al conjunto de los segundos componentes **(y)**
de los pares ordenados (x, y) le hemos
denominado

_____

rango de la relación

27

En un par ordenado dado

(x, y),

y es el/la [_____] de **x.**

imagen

28

A cualquier conjunto que contenga,
como subconjunto propio o impropio,
al conjunto de todas las imágenes
de los elementos del dominio,
le hemos dado el nombre de

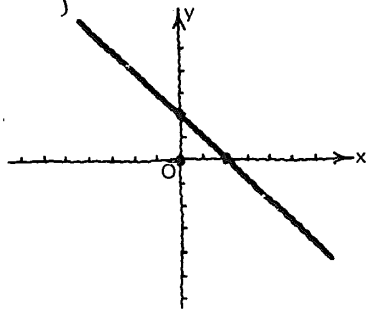
[_____]

codominio

29

En la relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = -x + 2\}$



el **dominio** es:

[_____]

$\mathbb{R}$

el **rango** es:

[_____]

$\mathbb{R}$

el **codominio** es:

[_____]

$\mathbb{R}$

30

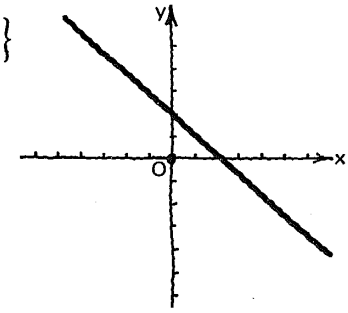
En la relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = -x + 2\}$

la imagen de -2 es ⌊____⌋

la imagen de **0** es ⌊____⌋

la imagen de **2** es ⌊____⌋



4

2

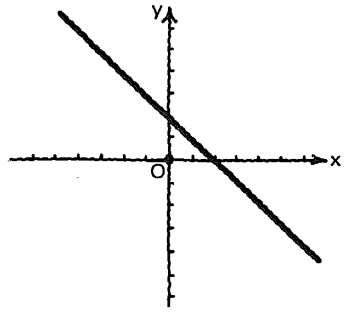
0

31

El **dominio**
y el **rango,**
de una relación
van a definir
una característica
que llamaremos

extensión

de la curva, o del
lugar geométrico
representado.



32

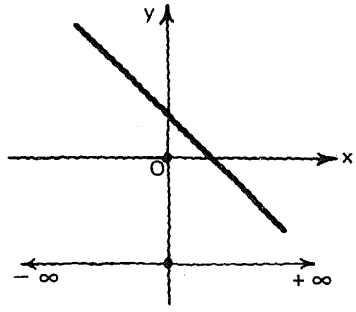
Como en la ecuación

$$y = -x + 2$$

y está definida
para toda $x \in \mathbb{R}$
el dominio es $\mathbb{R}$
(conjunto de todos
los números reales),
y la curva

se extiende
"horizontalmente"

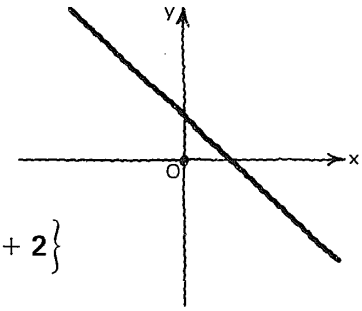
desde [$-\infty$] a [$+\infty$.]



33

El conjunto de todas las imágenes

$$y = -x + 2$$



es [ ]

Por lo tanto, el **rango** de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y = -x + 2\}$$

es [ ]

La curva **se extiende "verticalmente"**

desde [ ] a [ ].

$\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$

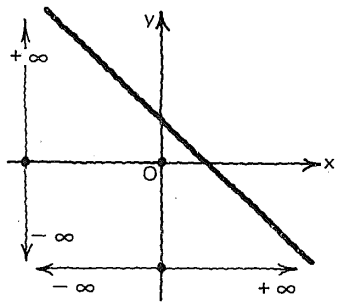
$-\infty + \infty$

34

Podemos dar la

extensión de una curva

en forma de intervalos. Por ejemplo, para la recta representada.



En x ⇨ $(-\infty, +\infty)$.

En y ⇨ $(-\infty, +\infty)$.

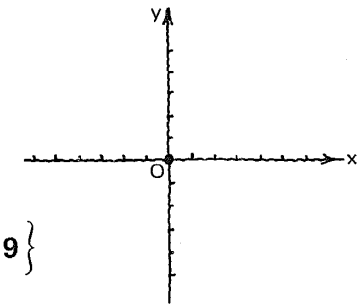
35

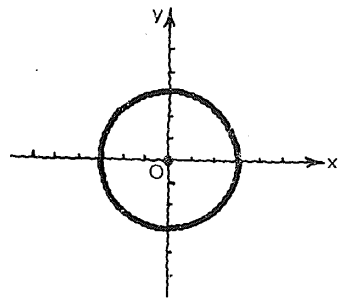
Dar el lugar geométrico o gráfica de la relación

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$$

y hacer una descripción de él.

[ ]





Una circunferencia de radio 3 con centro en el origen.

36

Para determinar el **dominio** de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$$

resolvemos para **y** la ecuación

$$x^2 + y^2 = 9.$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

37

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

para que **y** se defina en $\mathbb{R}$ se requiere que

$$9 - x^2 \geqslant 0$$

38

Resolvamos $9 - x^2 \geqslant 0$

$S =$

conjunto solución expresado como intervalo.

Factorizando

$(3 - x)(3 + x) \geqslant 0.$

$3 - x \geqslant 0$	$3 - x \leqslant 0$
$\therefore x \leqslant 3$	$\therefore x \geqslant 3$
$\wedge$	$\wedge$
$3 + x \geqslant 0$	$3 + x \leqslant 0$
$\therefore x \geqslant -3$	$\therefore x \leqslant -3$
$S_1 = [-3, 3]$	$S_2 = [\ ] = \phi$

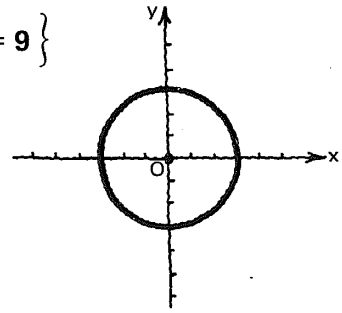
$S = [-3, 3] \cup [\ ] = [-3, 3]$

39

Por lo tanto,
el **dominio** de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$$

es



[ ]

como conjunto definido por comprensión,

o

[ ]

en forma de intervalo

$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -3 \leqslant x \leqslant 3\}$

$[-3, 3]$ $\quad x \in \mathbb{R}$

40

Para determinar
el **rango** de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$$

resolvemos para **x** la ecuación

$$x^2 + y^2 = 9.$$

[ ]

$x =$ [ ]

$x^2 = 9 - y^2$

$\downarrow$

$\pm\sqrt{9 - y^2}$

41

$$x = \pm\sqrt{9 - y^2}$$

para que **x** esté definido en $\mathbb{R}$
se requiere que

[ ]

$9 - y^2 \geqslant 0$

42

Resolvamos $9 - y^2 \geqslant 0$

S = [ ]

conjunto solución expresado en forma de intervalo.

Sustituyendo x por y en la resolución de la desigualdad anterior

↓

$[-3, 3]$

43

El **rango** de

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$

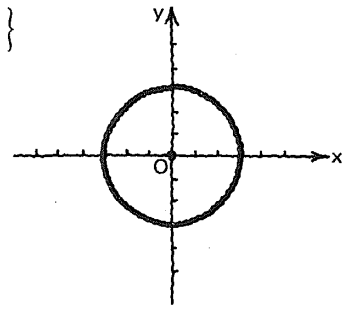
es, pues,

[ ]

como conjunto definido por comprensión, o

[ ]

en forma de intervalo.



$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

$[-3, 3]$

44

La curva representada por la relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$

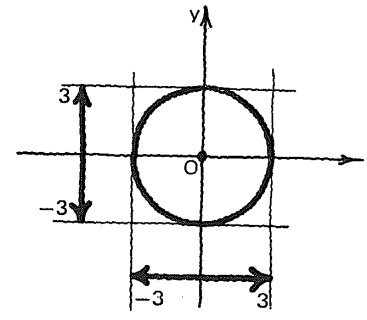
se extiende

- en x:

de – 3 a 3;

- en y

de – 3 a 3.



45

La expresión

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$$

podrá escribirse, en forma más precisa, así:

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge -3 \leqslant x \leqslant 3 \wedge x^2 + y^2 = 9\}.$$

46

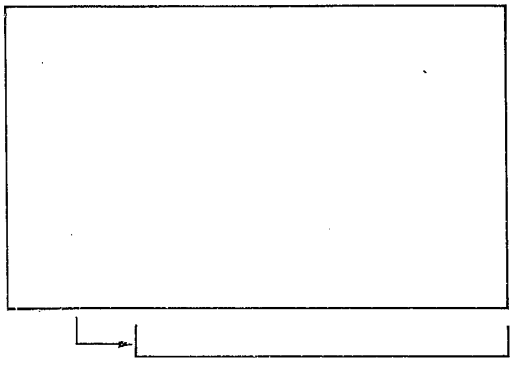
Se requiere determinar
la extensión de la curva
representada por

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge 4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0\}$$

47

1. Determinación del dominio.

1.1. Resolución de la ecuación para ⌊⌋



☞ Estudiar con atención.

- y

$9y^2 - 36y + 4x^2 - 32x = -64$

$9(y^2 - 4y) + 4(x^2 - 8x) = -64$

$9(y^2 - 4y + 4) +$

$4(x^2 - 8x + 16) = 36$

$9(y-2)^2 + 4(x-4)^2 = 36$

$9(y-2)^2 = 36 - 4(x-4)^2$

$$(y-2)^2 = \frac{36 - 4(x-4)^2}{9}$$

$$y - 2 = \frac{\pm\sqrt{36 - 4(x-4)^2}}{3}$$

- $$y = \frac{2 \pm \sqrt{36 - 4(x-4)^2}}{3}$$

48

$$y = 2 \pm \frac{\sqrt{36 - 4(x-4)^2}}{3}$$

Para que **y** esté definida en $\mathcal{R}$ se requiere que

$36 - 4(x-4)^2 \geqslant 0$

49

1.2. Determinación del intervalo para el cual existe **y** en la ecuación $2 \pm \frac{\sqrt{36 - 4(x-4)^2}}{3}$ al resolver la desigualdad $36 - 4(x-4)^2 \geqslant 0$.

$S =$

Factorizando:

$[6 + 2(x-4)][6 - 2(x-4)] \geqslant 0$

$6 + 2(x-4) \geqslant 0 \quad \therefore \quad x \geqslant 1$ $\wedge$ $6 - 2(x-4) \geqslant 0 \quad \therefore \quad x \leqslant 7$

$S_1 = [1, 7]$

$6 + 2(x-4) \leqslant 0 \quad \therefore \quad x \leqslant 1$ $\wedge$ $6 - 2(x-4) \leqslant 0 \quad \therefore \quad x \geqslant 7$

$S_2 = [\,] = \phi$

$\bullet \; S = [1, 7]$

50

El **dominio** de la relación dada es:

$\{x \mid x \in \mathcal{R} \wedge 1 \leqslant x \leqslant 7\}$

como conjunto definido por comprensión,

$[1, 7]$

como intervalo.

51

Sabemos, entonces,
que la curva representada
por la relación

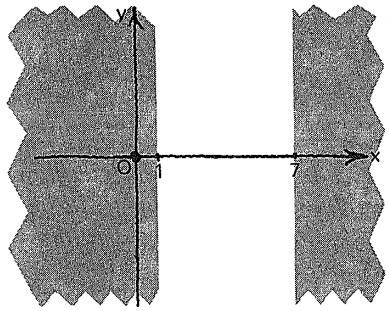
$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0\}$$

se extiende "horizontalmente" de⌊⌋a⌊⌋.

1 7

52

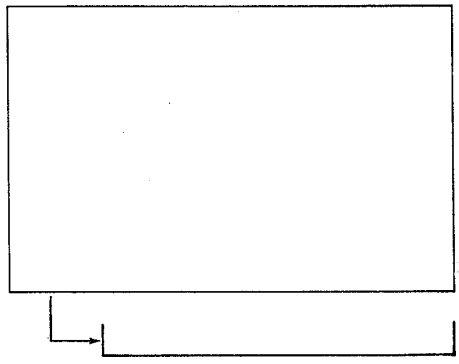
La curva existe
horizontalmente sólo
en la región no sombreada.



53

2. Determinación del **rango.**

2.1. Resolución de la ecuación para ⌊⌋



x

de $9(y-2)^2 + 4(x-4)^2 = 36$

$4(x-4)^2 = 36 - 9(y-2)^2$

$$(x-4)^2 = \frac{36 - 9(y-2)^2}{4}$$

$$x - 4 = \frac{\pm\sqrt{36 - 9(y-2)^2}}{2}$$

$$x = 4 \pm \frac{\sqrt{36 - 9(y-2)^2}}{2}$$

54

$$x = 4 \pm \frac{\sqrt{36 - 9(y-2)^2}}{2}$$

Para que x se defina en $\mathbb{R}$
se debe verificar que

$36 - 9(y-2)^2 \geqslant 0$

55

2.2. Determinación del intervalo para el cual está definida x, en la ecuación $x = 4 \pm \frac{\sqrt{36 - 9(y-2)^2}}{2}$ resolviendo la desigualdad $36 - 9(y-2)^2 \geqslant 0$.

$S =$

Factorizando:

$[6 + 3(y-2)][6 - 3(y-2)] \geqslant 0$

$6 + 3(y-2) \geqslant 0$ $\therefore$ $y \geqslant 0$ $\wedge$ $6 - 3(y-2) \geqslant 0$ $\therefore$ $y \leqslant 4$

$6 + 3(y-2) \leqslant 0$ $\therefore$ $y \leqslant 0$ $\wedge$ $6 - 3(y-2) \leqslant 0$ $\therefore$ $y \geqslant 4$

$S_1 = [0, 4]$ $\quad S_2 = [\,] = \phi$

$S = [0, 4] \cup [\,] = [0, 4]$

56

El **rango** de la relación dada es

como conjunto definido por comprensión,

o

como intervalo.

$\{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant y \leqslant 4\}$

$[0, 4]$

57

La curva representada
por la relación,

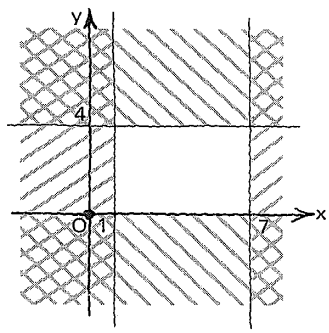
$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge 4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0\}$$

se extiende "verticalmente" de ⌊___⌋ a ⌊___⌋ .

0 4

58

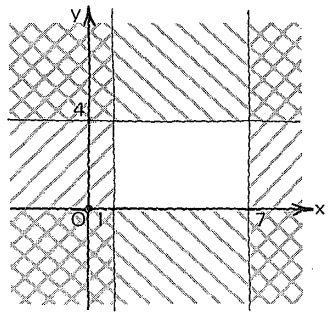
Con esto, sabemos que
la curva existe únicamente
en la región no sombreada
de la figura.



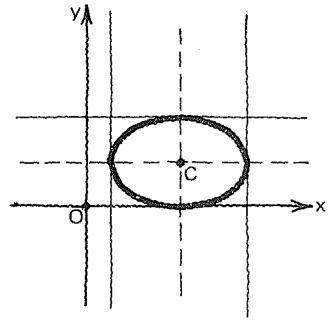
59

Tracemos ahora el lugar
geométrico representado,
por la relación dada.
Podemos hacer esto por
tabulación, escogiendo para x
algunos valores dentro del
dominio y determinando las
correspondientes imágenes
a partir de

$$y = 2 \frac{\pm\sqrt{36 - 4(x-4)^2}}{3}$$



o aplicando los conocimientos, que
tenemos de los lugares geométricos
representados por una ecuación
de 2º grado con dos variables.



una elipse horizontal con
centro en (4, 2),
semieje mayor = 3
y semieje menor = 2.

60

Dar la extensión de la curva representada por

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y^2 - 4x - 2y - 7 = 0\}$$

o

$$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

61

1. Determinación del **dominio** de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y^2 - 4x - 2y - 7 = 0\}$$

1.1. [ ]

[ ]

$y =$ [ ]

- Resolución para y de la ecuación $y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$
- $y^2 - 2y - 4x - 7 = 0$ es una ecuación de segundo grado de la forma: $ay^2 + by + c = 0$ en que: $a = 1\ b = -2\ c = -4x - 7$ por lo tanto: $y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(4x + 7)}}{2}$
- $y = 1 \pm \sqrt{4x + 8}$

62

1. Determinación del dominio.

1.2. [ ]

[ ]

$S =$ [ ]
como intervalo

Determinación del intervalo para el cual está definida y en

$y = 1 \pm \sqrt{4x + 8}$
resolviendo la desigualdad:
$4x + 8 \geqslant 0$
$4x \geqslant -8$
$x \geqslant -2$

$(-2, +\infty)$

63

Como el **dominio** de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y^2 - 4x - 2y - 7 = 0\}$$

es [ ]

como conjunto definido por comprensión.

sabemos que
la curva representada
se extiende de[ ] a[ ].

$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant -2\}$

$-2 + \infty$

64

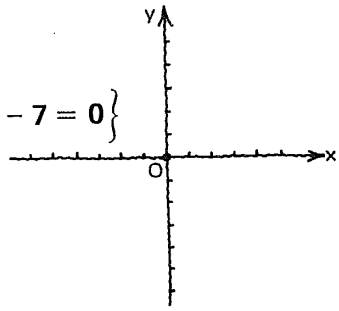
Sombrear
la región del plano cartesiano
en que no existe
la curva
representada por

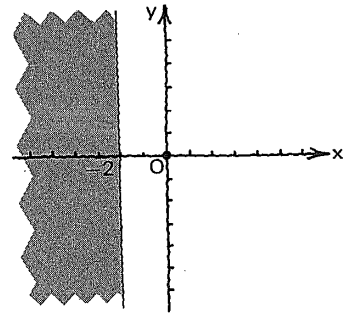
$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y^2 - 4x - 2y - 7 = 0\}$

o por

$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$

en la dirección de x.





65

2. Determinación del **rango** de la relación dada.

2.1. [ ]

x = [ ]

Resolución para **x** de la ecuación
$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$

$4x = y^2 - 2y - 7$

$\frac{y^2 - 2y - 7}{4}$

66

2. Determinación del rango de la relación dada.

2.2. ⌊_____⌋

S = ⌊_____⌋

como intervalo

Determinación del intervalo para el cual está definida x en la ecuación

$$x = \frac{y^2 - 2y - 7}{4}$$

la expresión del segundo miembro está definida para toda $x \in \mathbb{R}$

$-\infty, +\infty$

67

El rango de la relación dada es ⌊_⌋

La curva representada se extiende de

⌊_____⌋

$\mathbb{R}$

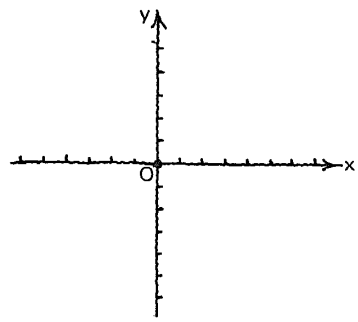
$-\infty$ a $+\infty$

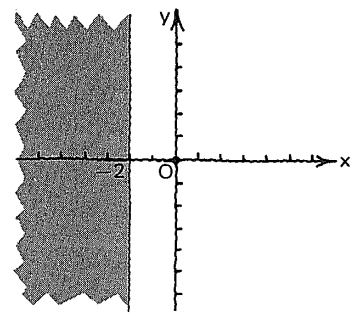
68

Entonces,
la curva representada
por

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant -2 \wedge y^2 - 4x - 2y - 7 = 0\}$$

existe
en la región no sombreada.
Sombree entonces, la región
en que no existe la curva.





69

Trazar la gráfica cartesiana representada por

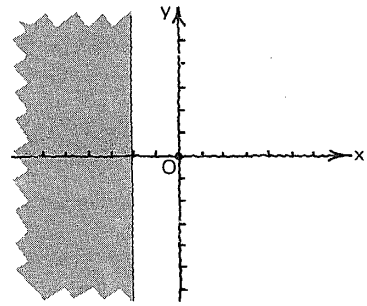
$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x \geq -2 \wedge y^2 - 4x - 2y - 7 = 0\}$$

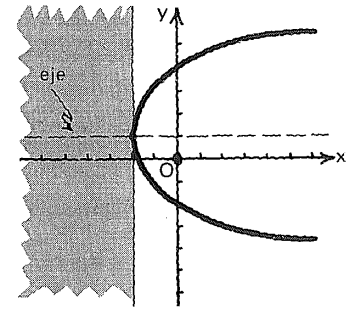
o por la ecuación

$$y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$$

$x, y \in \mathbb{R} \wedge x \geq -2$

por el método que se elija.





70

Dar la extensión de la curva representada por la relación

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0\}$$

71

1. [ ]

1.1. [ ]

[ ]

[ ]

Determinación del dominio de la relación dada.

Resolver para y la ecuación

$4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0$

$y^2 = 4x^2 - 24x + 35$

$y = \pm\sqrt{4x^2 - 24x + 35}$

$y = \pm\sqrt{4(x - 3)^2 - 1}$

72

1. Determinación del dominio

1.2. [ ]

[ ]

[ ]

Determinación del intervalo para el cual está definida y en la ecuación

$$y = \pm\sqrt{4(x-3)^2 - 1}$$

resolviendo la desigualdad

$$4(x-3)^2 - 1 \geqslant 0$$

$$[2(x-3)+1][2(x-3)-1] \geqslant 0$$

$$(2x-5)(2x-7) \geqslant 0$$

$2x-5 \geqslant 0$	$2x-5 \leqslant 0$
$\therefore \quad x \geqslant \frac{5}{2}$	$\therefore \quad x \leqslant \frac{5}{2}$
$\wedge$	$\wedge$
$2x-7 \geqslant 0$	$2x-7 \leqslant 0$
$\therefore \quad x \geqslant \frac{7}{2}$	$\therefore \quad x \leqslant \frac{7}{2}$
$S_1 = [\frac{7}{2}, +\infty)$	$S_2 = (-\infty, \frac{5}{2}]$

$$S = (-\infty, \tfrac{5}{2}] \cup [\tfrac{7}{2}, +\infty)$$

73

El **dominio** de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0\}$$

es [ ]

La curva representada se extiende "horizontalmente"

[ ]

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge (x \leqslant \tfrac{5}{2} \vee x \geqslant \tfrac{7}{2})\}$$

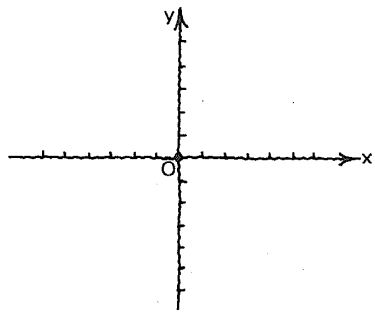
de $-\infty$ a $\frac{5}{2}$ y de $\frac{7}{2}$ a $+\infty$

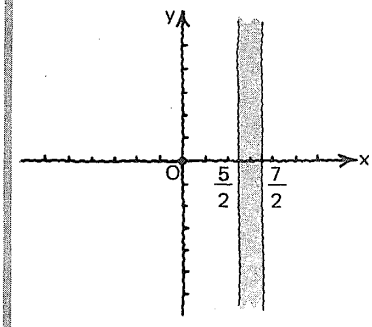
74

Sombrear la región del plano cartesiano en que no existe la curva representada por la ecuación

$$4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0$$

en la dirección de x.

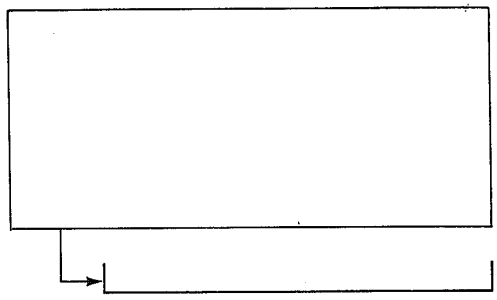




75

2. ⌊_____⌋

2.1. ⌊_____⌋



⌊_____⌋

Determinación del rango de la relación dada.

Resolución para x de la ecuación:

$4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0$

$4x^2 \underbrace{- 24x} \underbrace{- y^2 + 35} = 0$

↑ ↑ ↑

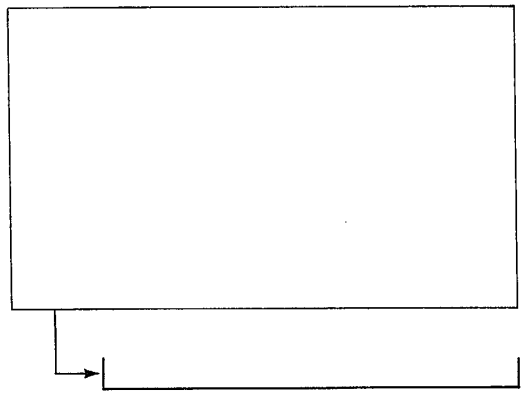
a b c

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 16\,(35 - y^2)}}{8}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{1 + y^2}}{2}$$

76

2.2. ⌊_____⌋



⌊_____⌋

Determinación del intervalo para el cual se define x en la ecuación

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{1 + y^2}}{2}$$

resolviendo la desigualdad

$1 + y^2 \geqslant 0$

el primer miembro no es factorizable en $\mathbb{R}$

$b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(1) = -4$

$-4 < 0$

0 satisface la desigualdad puesto que $1 \geqslant 0$ PCV

conjunto solución $S = \mathbb{R}$

- $(-\infty, +\infty)$

77

El **rango** de

$$\left\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \left(x \leqslant \tfrac{5}{2} \vee x \geqslant \tfrac{7}{2}\right) \wedge \right.$$

$$\left. \mathbf{4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0} \right\}$$

es ⌊___⌋

La curva se extiende "verticalmente"

⌊_____⌋

$\mathbb{R}$

de $-\infty$ a $+\infty$

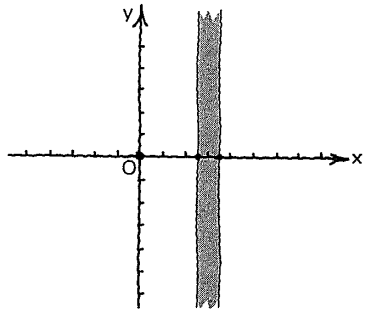
78

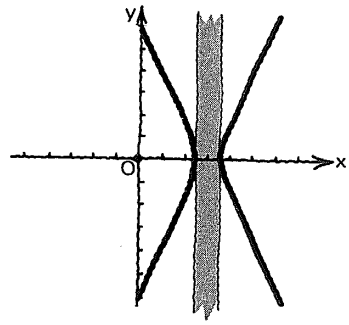
Trazar la curva representada por la ecuación

$4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0$

$x \in \mathbb{R} \wedge \left(x \leqslant \frac{5}{2} \vee x \geqslant \frac{7}{2}\right)$

y dar el nombre del lugar geométrico.





Hipérbola horizontal con centro en (3, 0), semieje transverso $= \frac{1}{2}$ y semieje conjugado $= 1$

79

Dar la extensión de la curva representada por

$$\left\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge xy + 2x + 3y + 4 = 0\right\}$$

80

1.

1.1.

Determinación del dominio

Resolver para y la ecuación

$xy + 2x + 3y + 4 = 0$

$(x + 3)\, y = -2x - 4$

$$y = \frac{-2x - 4}{x + 3}$$

$$y = -\frac{2(x + 2)}{x + 3}$$

81

1. Determinación del dominio.

1.2. _____

S = _____
como intervalo

Estudiar con atención.

- Determinación del intervalo para el que está definida y en la ecuación

$$y = -\frac{2(x+2)}{x+3}$$

Para que la expresión del segundo miembro se defina en $\mathcal{R}$ se requiere que:
$x + 3 \neq 0$ o que
$x \neq -3$

- $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

82

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge xy + 2x + 3y + 4 = 0\}$$

Dominio = _____

Extensión "horizontal" de la curva:

_____

$$\{x \mid x \in \mathcal{R} \wedge x \neq -3\}$$

$(-\infty, -3) \cup (-3 + \infty)$

83

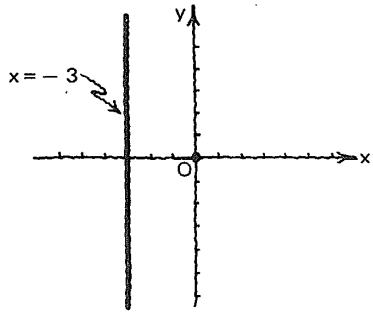
La curva no existe para un único valor de x.
Decimos, entonces, que la recta

$$x = -3$$

es una

asíntota vertical

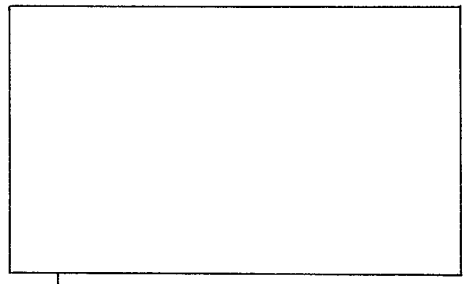
de la curva.



84

2. ⌊_____⌋

2.1. ⌊_____⌋



⌊_____⌋

Determinación del rango.

Resolución para x de la ecuación
$xy + 2x + 3y + 4 = 0$

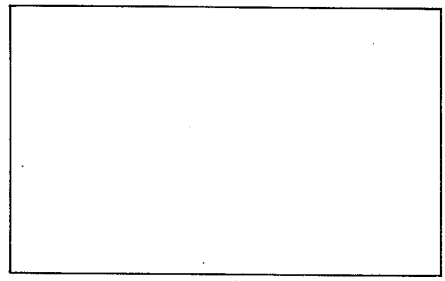
$x(y + 2) = -3y - 4$

$$x = -\frac{3y + 4}{y + 2}$$

85

2. Determinación del rango.

2.2. ⌊_____⌋



S = ⌊_____⌋
como intervalo

- Determinación del intervalo para el que se define x en la ecuación

$$x = -\frac{3y + 4}{y + 2}$$

Para que la expresión del segundo miembro se defina en $\mathbb{R}$ se requiere que:

$y + 2 \neq 0$ o que:
$y \neq -2$

$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

86

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x \neq -3 \wedge xy + 2x + 3y + 4 = 0\}$

Rango = ⌊_____⌋

Extensión vertical de la curva:

⌊_____⌋

$\{y/y \in \mathbb{R} \wedge y \neq -2\}$

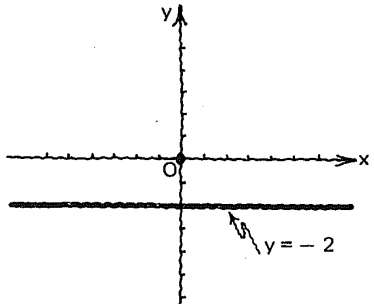
$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

87

La curva
no existe
para un único valor de y.
Decimos que
la recta [ ]
es una

asíntota horizontal

de la curva.



y = – 2

88

La curva representada
por la ecuación

$xy + 2x + 3y + 4 = 0$

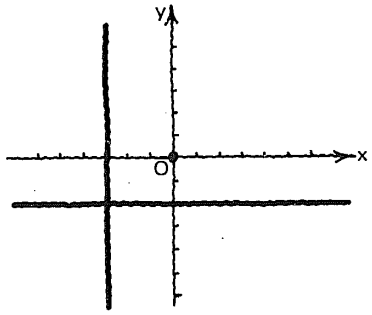
$x \neq -3 \wedge y \neq -2$

tiene dos asíntotas:
- una asíntota vertical,
una de cuyas ecuaciones es:

[ ]

- y una asíntota horizontal,
una de cuyas ecuaciones es:

[ ]



x = – 3 (ó x + 3 = 0)

y = – 2 (ó x + 2 = 0)

89

Trazar la curva representada
por la relación

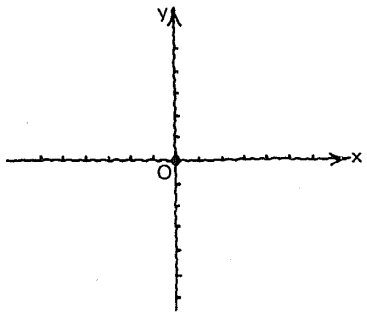
$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2$
$\wedge x \neq -3 \wedge y \neq -2$
$\wedge xy + 2x + 3y + 4 = 0\}$

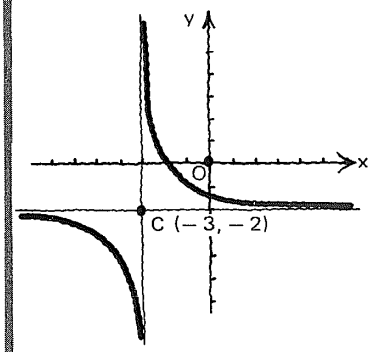
o por la ecuación
$xy + 2x + 3y + 4 = 0$

$x \neq -3 \wedge y \neq -2$

y dar el nombre del
lugar geométrico.

[ ]





Hipérbola rectangular
con centro en (– 3, – 2)

6.8.1.1

Práctica adicional
de determinación de la extensión
de la curva representada
por una relación o por una ecuación dada,
si se considera necesario.

6.8.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la extensión de una curva representada por una relación o una ecuación dada.

8.2

Relaciones cualesquiera y funciones

90

Recordemos que hemos definido una clase especial de relaciones en las que cada elemento del dominio tiene una imagen única, y las hemos llamado

_____

funciones

91

Una relación representada por su gráfica cartesiana la identificamos como función si

_____

toda recta "vertical" trazada dentro del dominio interseca a la curva en un punto único

92

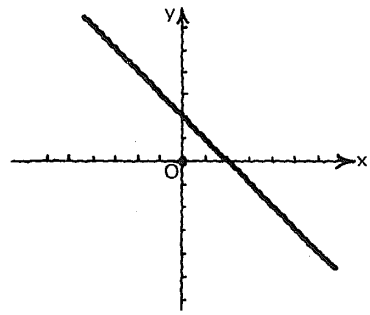
La relación

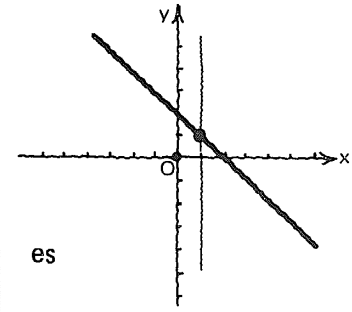
$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = -x + 2\}$

cuya gráfica cartesiana habíamos obtenido

es/no es

una función.





es

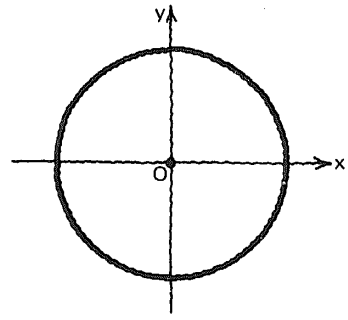
93

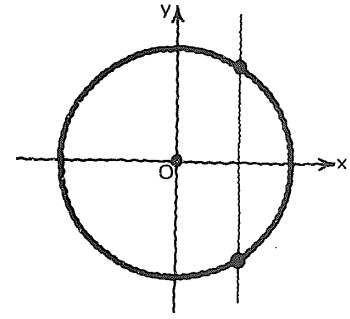
La relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge -3 \leqslant x \leqslant 3 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$

es/no es

una función.





● no es

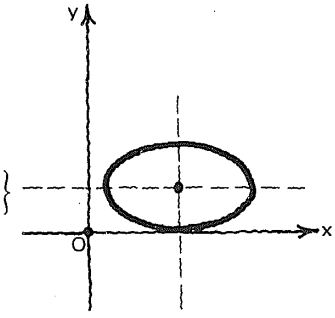
94

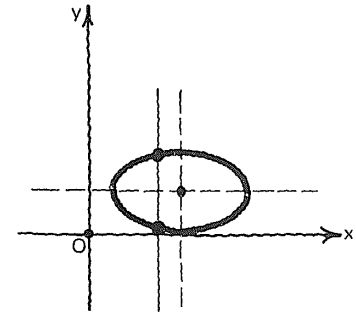
La relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge 1 \leqslant x \leqslant 7 \wedge 4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0\}$

es/no es

una función.



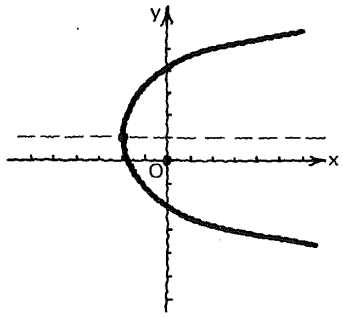


● no es

95

La relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x \geqslant -2 \wedge y^2 - 4x - 2y - 7 = 0\}$



es/no es

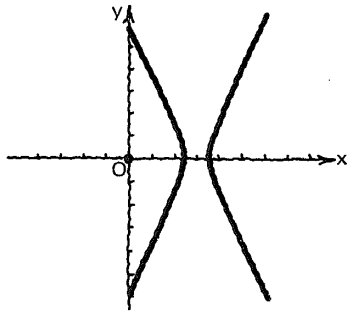
una función.

no es

96

La relación

$\{(x, y) \mid (x\ y) \in \mathbb{R}^2 \wedge (x \leqslant \frac{5}{2} \vee x \geqslant \frac{7}{2}) \wedge 4x^2 - y^2 - 24x + 35 = 0\}$



es/no es

una función.

no es

97

La relación

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x \neq -3 \wedge y \neq -2 \wedge xy + 2x + 3y + 4 = 0\}$

es/no es

una función.

es

6.8.2.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.8.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *señalar* si una expresión dada de la forma
  $\{ (x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \text{ecuación en x e y} \}$
  es o no una función, con ayuda de la gráfica cartesiana correspondiente.

8.3

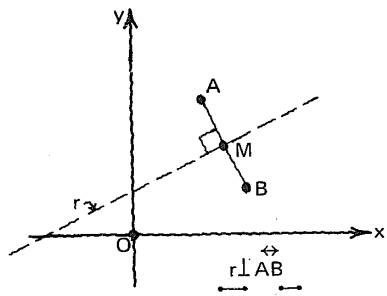
Simetría

98

Decimos que
dos puntos, A y B,
son

simétricos
respecto de una recta r,

si y sólo si
la recta r
es mediatriz
del segmento $\overleftrightarrow{AB}$.



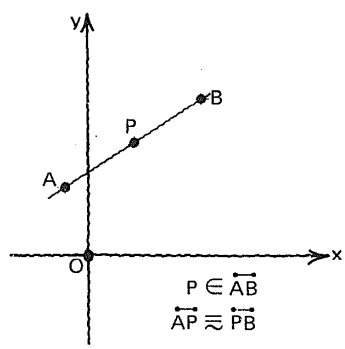
99

Dos puntos, A y B, son

simétricos respecto de un

tercer **punto P,**

si y sólo si
P es el punto medio
del segmento $\overleftrightarrow{AB}$.

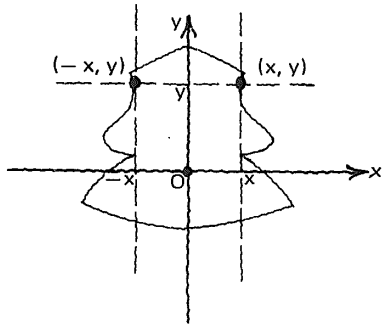


100

Una **curva** es

simétrica respecto del eje y,

si y sólo si perteneciendo un punto (x, y) a la curva, el punto (– x, y) también pertenece a ella.

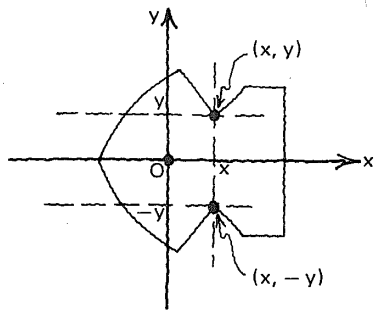


101

Similarmente, una

curva es simétrica respecto del eje x

si y sólo si



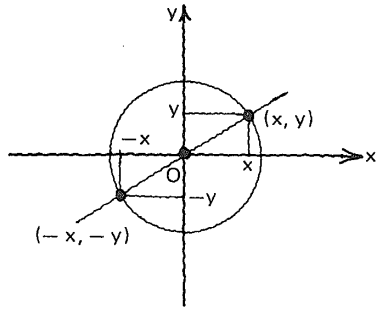
perteneciendo un punto (x, y) a la curva, el punto (x, – y) también pertenece a ella

102

Además, una curva es

simétrica respecto del origen,

si y sólo si perteneciendo un punto (x, y) a la curva, el punto (– x, – y) también pertenece a ella.



103

Atención.

Si en una ecuación en **x** e **y**

sustituimos x por (– x)

y obtenemos una ecuación
equivalente a la dada, entonces la

curva

representada por la ecuación es

simétrica respecto del eje y.

104

Atención.

Si en una ecuación en **x** e **y**

sustituimos y por (– y),

y obtenemos una ecuación equivalente
a la dada, entonces la

curva

representada por la ecuación es

simétrica respecto del eje x.

105

Si en una ecuación en **x** e **y**

sustituimos x por (– x), e y por (– y),

y obtenemos una ecuación
equivalente a la dada, entonces, la

curva

representada por la ecuación es

simétrica respecto del origen.

106

Por ejemplo.
Sea la ecuación

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

1. Sustituimos x por (– x), y obtenemos

Como esta ecuación **es/no es** equivalente a la dada, concluimos que

$4(-x)^2 + 9y^2 = 36$
como $(-x)^2 = x^2$

$4x^2 + 9y^2 = 36$

es

la curva representada por la ecuación es *simétrica* respecto del eje y

107

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

2. Sustituimos **y** por **(– y)** y obtenemos

Como esta ecuación **es/no es** equivalente a la dada, concluimos que

$4x^2 + 9(-y)^2 = 36$
como $(-y)^2 = y^2$

$4x^2 + 9y^2 = 36$

es

la curva representada por la ecuación es simétrica respecto del eje x

108

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

3. Sustituimos **x** por (– x), y **y** por (– y) y obtenemos

Como esta ecuación **es/no es** equivalente a la dada, concluimos que

$4(-x)^2 + 9(-y)^2 = 36$
como $(-x)^2 = x^2$ y
$(-y)^2 = y^2$

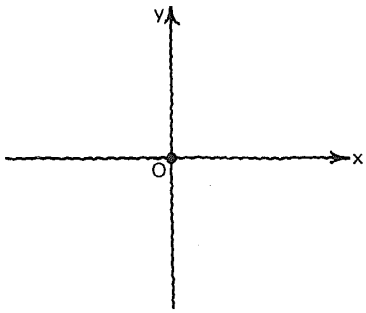
$4x^2 + 9y^2 = 36$

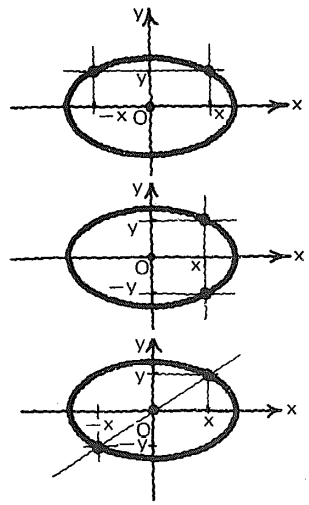
es

la curva representada por la ecuación es simétrica respecto del origen

109

Veamos esto gráficamente.





110

Se requiere saber si la curva representada por la ecuación

$$y = -x + 2$$

es:

simétrica respecto del eje y,
simétrica respecto del eje x,
simétrica respecto del origen.

111

1. La curva representada por

$$y = -x + 2$$

es/no es

simétrica respecto del eje y porque

_____

no es

al sustituir x por (− x) la ecuación resultante no es equivalente a la dada.

Ver cuadro siguiente.

112

Ecuación dada:

$y = - x + 2$

sustituimos x por (– x) y obtenemos:

$y = - (- x) + 2$

o

$y = x + 2$

Las ecuaciones $y = - x + 2$ e $y = x + 2$ no son equivalentes; no tienen el mismo conjunto solución; no representan el mismo lugar geométrico.

113

2. La curva representada por

$y = - x + 2$

es/no es simétrica respecto del eje x, porque

no es

al sustituir y por (– y) la ecuación resultante no es equivalente a la dada.
Ecuación dada:
$y = - x + 2$
si sustituimos y por (– y) obtenemos:
$- y = - x + 2$
ó $y = x - 2$

114

3. La curva representada por

$y = - x + 2$

es/no es simétrica respecto del origen, porque

no es

al sustituir x por (– x) e y por (– y) en la ecuación dada, no obtenemos una ecuación equivalente.
Ecuación dada:
$y = - x + 2$
si sustituimos x por (– x) e y por (– y) obtenemos:
$-y = - (- x) + 2$
$- y = x + 2$
ó $y = - x - 2$

115

Determinar si la curva representada por la ecuación

$$xy = 2$$

es:

simétrica respecto del eje y,
simétrica respecto del eje x,
simétrica respecto del origen.

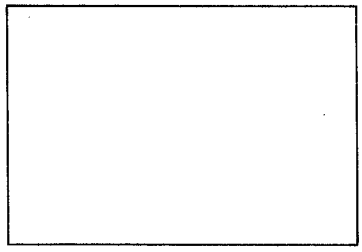
116

1. La curva representada por

$$xy = 2$$

es/no es simétrica respecto del eje y.

En efecto.



no es

$xy = 2$ ←

sustituyendo x por $(-x)$

$(-x)y = 2$

o

$-xy = 2$

o

$xy = -2$ ←

no son equivalentes

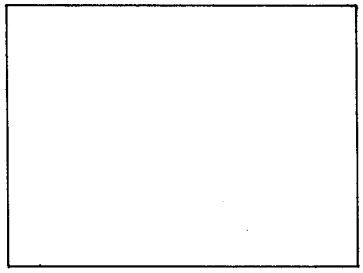
117

2. La curva representada por

$$xy = 2$$

es/no es simétrica respecto del eje x.

En efecto:



no es

$xy = 2$ ←

sustituyendo y por $(-y)$

$x(-y) = 2$

↓

$xy = -2$ ←

no son equivalentes

118

3. La curva representada por

$$xy = 2$$

es/no es
simétrica respecto
del origen.

En efecto:

es

$xy = 2$ ←

sustituyendo x por $(-x)$
e y por $(-y)$
$(-x)(-y) = 2$

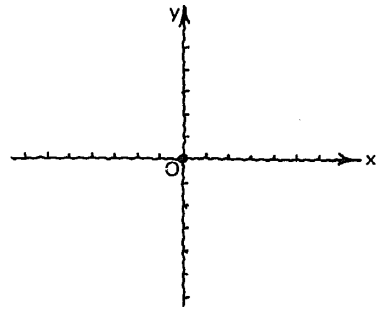
son equivalentes

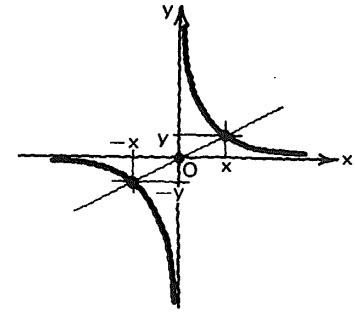
$xy = 2$ ←

119

Trazar
la curva
representada por
la ecuación

$$xy = 2.$$





6.8.3.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.8.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* si una curva dada por una ecuación es:

  — simétrica respecto del eje y,
  — simétrica respecto del eje x,
  — simétrica respecto del origen.

8.4

Trazo de curvas

120

Hemos estudiado en detalle
la naturaleza de los lugares geométricos
representados por

- una ecuación de primer grado,
  o por
- una ecuación de segundo grado.

121

Para obtener la curva representada
por una ecuación de diferente forma
de las estudiadas, podemos utilizar
el procedimiento de "tabulación",
seleccionando algunos elementos
del dominio y calculando sus
correspondientes imágenes.

122

En este proceso será de gran ayuda
conocer, siempre que sea posible:

1. la **extensión de la curva** a lo largo
   de cada uno de los ejes coordenados;

2. la **simetría** o no simetría de la curva
   respecto de los ejes coordenados o del origen;

3. las **intersecciones** con los ejes coordenados.

123

Se requiere conocer
la naturaleza del lugar
geométrico representado
por la ecuación

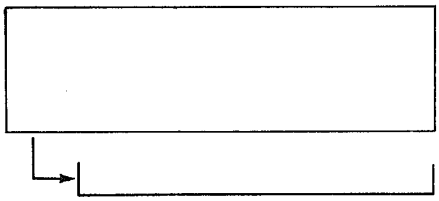
$$8x^3 - y = 0 \qquad x, y \in \mathcal{R}$$

124

1. Extensión de la curva.

1.1. A lo largo del eje x.
Determinamos el **dominio**
de la relación

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge 8x^3 - y = 0\}$$



como intervalo

De
$8x^3 - y = 0$

se obtiene $y = 8x^3$
la expresión $8x^3$
está definida en $\mathcal{R}$
para toda $x \in \mathcal{R}$
por lo tanto:
dominio $= \mathcal{R}$

$(-\infty, +\infty)$

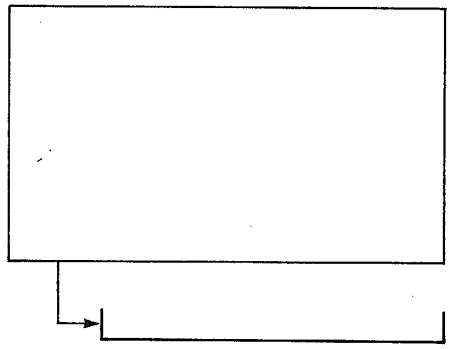
125

Sabemos, entonces
que la curva se extiende
de ⌊___⌋ a ⌊___⌋
a lo largo del eje x.

$-\infty \quad +\infty$

126

1.2. A lo largo del eje **y**.



como intervalo

De $8x^3 - y = 0$

obtenemos: $x = \frac{\sqrt[3]{y}}{2}$

la expresión $\frac{\sqrt[3]{y}}{2}$
está definida en $\mathbb{R}$ para
toda $y \in \mathbb{R}$
rango = $\mathbb{R}$

$(-\infty, +\infty)$

127

La curva se extiende
a lo largo del eje **y**

⌊_____⌋

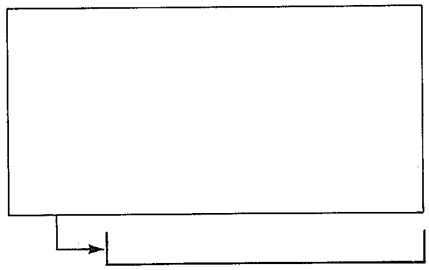
de $-\infty$ a $+\infty$

128

2. Simetría de la curva

$$8x^3 - y = 0$$

2.1. Respecto del eje **y.**



$8x^3 - y = 0$

si sustituimos
x por $(- x)$
obtenemos:
$8(- x)^3 - y = 0$ — no son equivalentes
pero
$(- x)^3 = - x^3$
entonces
$- 8x^3 - y = 0$
ó
$8x^3 + y = 0$

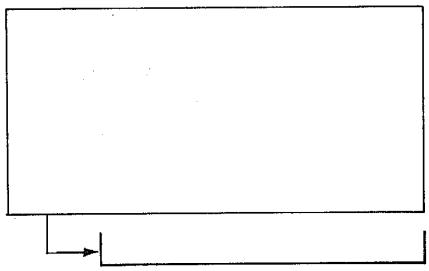
curva no simétrica con respecto del eje y

129

2. Simetría de

$$8x^3 - y = 0$$

2.2. Respecto a x.



$8x^3 - y = 0$
sustituyendo
y por $(- y)$
se obtiene
$8x^3 - (- y) = 0$ — no son equivalentes
ó
$8x^3 + y = 0$

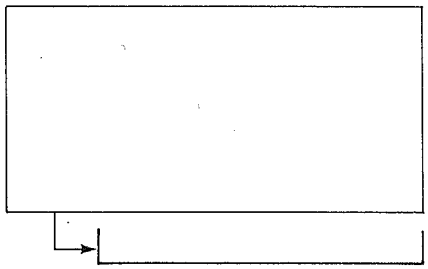
curva no simétrica con respecto al eje x

130

2. Simetría de

$$8x^3 - y = 0$$

2.3. Respecto del origen.



$8x^3 - y = 0$

sustituyendo x
por $(- x)$
e y por $(- y)$ — son equivalentes
obtenemos
$8(- x)^3 - (- y) = 0$
$- 8x^3 + y = 0$
ó
$8x^3 - y = 0$

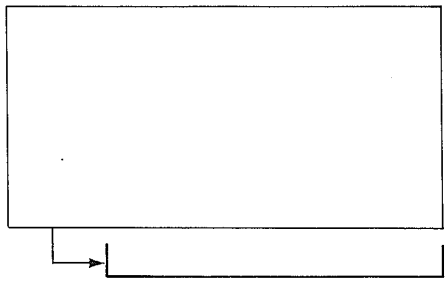
curva simétrica con respecto al origen

131

3. Intersecciones.

$$8x^3 - y = 0$$

3.1. Con el eje y.



En $8x^3 - y = 0$
si $x = 0$
$y = 0$

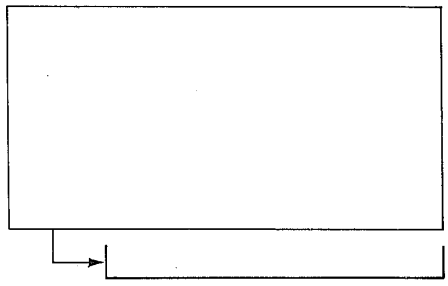
Punto único de intersección de la curva con el eje y: (0, 0)

132

3. Intersecciones.

$$8x^3 - y = 0.$$

3.2. Con el eje x.



En $8x^3 - y = 0$
si $y = 0$
$x = 0$

Punto único de intersección de la curva con el eje x: (0, 0)

133

Al resumir los resultados obtenidos nos damos cuenta de que la curva representada por la ecuación

$$8x^3 - y = 0$$

tiene las siguientes características:

1. se extiende, sin interrupciones, de $-\infty$ a $+\infty$, a lo largo de ambos ejes coordenados,
2. es simétrica respecto del origen,
3. pasa por el origen, y no interseca a los ejes coordenados en ningún otro punto.

134

$8x^3 - y = 0$

Seleccionemos algunos elementos del dominio y calculemos sus correspondientes imágenes.

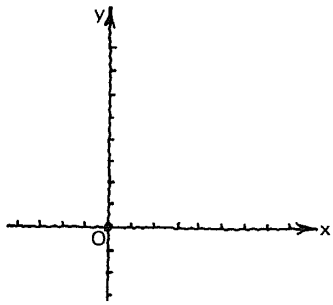
x	$y = 8x^3$
1	
2	
3	

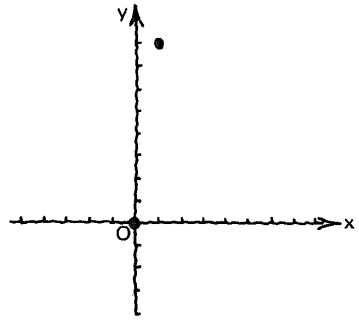
x	$y = 8x^3$
1	8
2	64
3	216

135

Representemos estos puntos [además de (0, 0)] en el plano cartesiano.

x	y
1	8
2	64
3	216



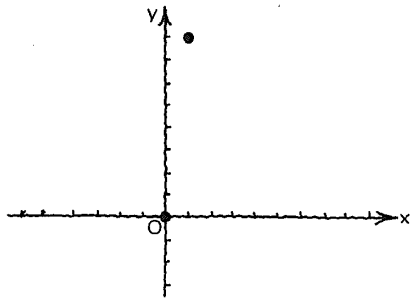


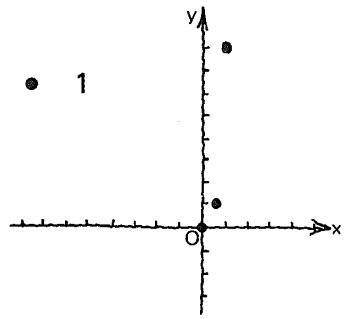
los puntos (2, 64) y (3, 216) podemos imaginarlos

136

Determinemos un punto más.

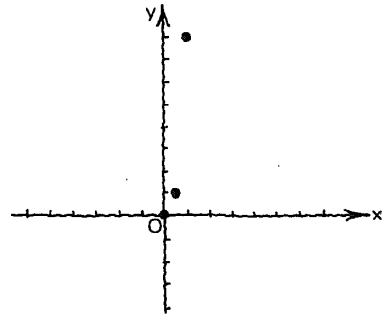
x	y
1/2	
1	8
2	64
3	216

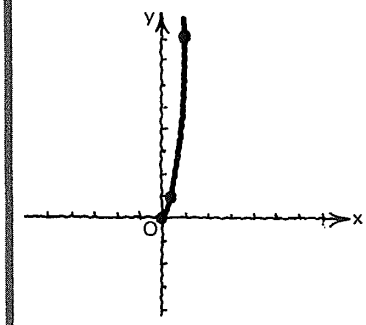




137

Uniendo los puntos
representados
por medio de una línea
de trazo fluido
se obtiene
una porción de la curva

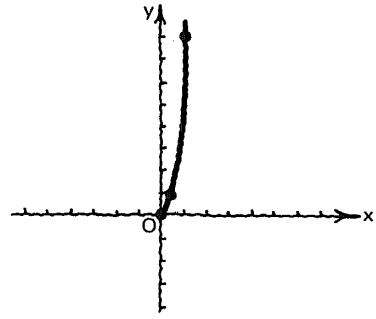




138

Obtengamos
la porción faltante
sabiendo que
la curva es simétrica
con respecto al origen.
Si los puntos $(\frac{1}{2}, 1)$ y $(1, 8)$
pertenecen a la curva
también deberán pertenecer
a ella los puntos

_____ y _____

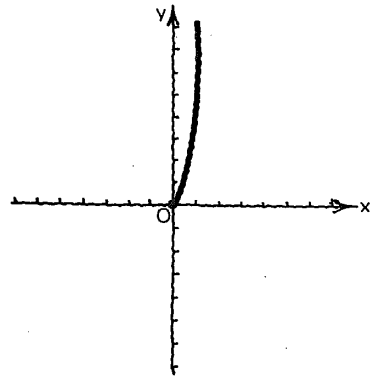


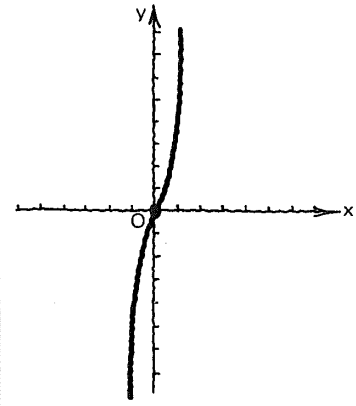
$(-\frac{1}{2}, -1)$ $(-1, -8)$

139

Completemos
el trazo
de la curva
representada por

$8x^3 - y = 0$





6.8.4.1

Práctica adicional de trazo de la curva representada por una ecuación en x e y, por el procedimiento de tabulación, si se considera necesario.

140

El primer miembro de algunas ecuaciones en las que el segundo miembro es igual a cero, puede ser descompuesto en factores, obteniéndose así un lugar geométrico constituido por dos o más curvas, una correspondiente a cada uno de los factores.

141

Sea la ecuación

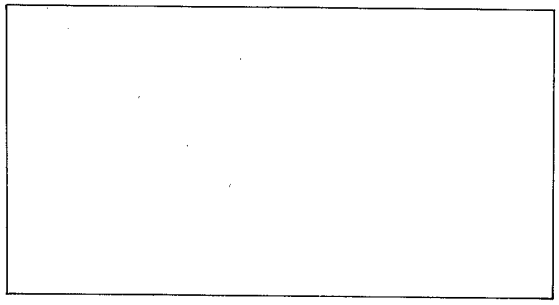
$$y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

Se requiere conocer el lugar geométrico representado.

142

$$y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0$$

Intentamos, en primer lugar, descomponer en factores el primer miembro.
Probemos la factorización distributiva por agrupación de términos.



$y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0$

$y^2\ (y - x) - 4x\ (y - x)$

$(y - x)\ (y^2 - 4x) = 0$

143

$$y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0$$
$$\downarrow$$
$$(y - x)\ (y^2 - 4x) = 0$$

Sabemos que
si $AB = 0$, entonces $A = 0 \vee B = 0$;
por lo tanto, la segunda ecuación es equivalente al sistema disyuntivo siguiente:

$\square \vee \square$

$y - x = 0 \qquad y^2 - 4x = 0$

144

$$y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0$$
$$\downarrow$$
$$(y - x)\ (y^2 - 4x) = 0$$

$$y - x = 0\ (1) \quad \vee \quad y^2 - 4x = 0\ (2)$$

Trazando las curvas correspondientes a cada una de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos el lugar geométrico representado por la ecuación dada.

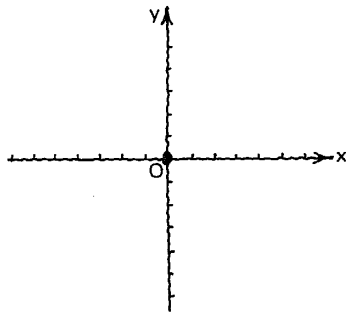
145

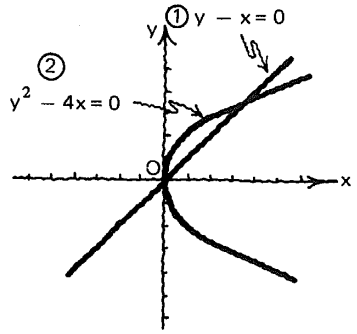
Trazar las curvas correspondientes a:

① $y - x = 0$

y

② $y^2 - 4x = 0$





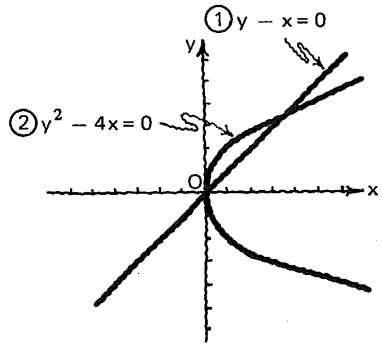
146

El lugar geométrico representado por la ecuación

$y^3 - xy^2 - 4xy + 4x^2 = 0$

está formado por:

- todos los puntos pertenecientes a la recta $y - x = 0$; y
- todos los puntos pertenecientes a la parábola $y^2 - 4x = 0$.



6.8.4.2

Práctica adicional de obtención del lugar geométrico representado por una ecuación de la forma:
$A \cdot B \cdot C \cdot \ldots = 0$ en que A, B, C, ... son expresiones algebraicas en x e y,
si se considera necesario.

6.8.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* el lugar geométrico representado por una ecuación en x e y;
- *obtener* el lugar geométrico representado por una ecuación de la forma: $A \cdot B \cdot C \cdot \ldots = 0$ en que A, B, C, ... son expresiones algebraicas en x e y.

8.5

Ecuaciones de lugares geométricos.

147

A veces se requiere una ecuación de un lugar geométrico a partir de las condiciones que debe satisfacer cada uno de sus puntos.

Veamos algunos ejemplos.

148

Se requiere una ecuación del lugar geométrico de los puntos (x, y) que equidisten de los puntos fijos A(2, 5) y B(6, – 1).

149

Para cualquier punto (x, y) del lugar geométrico deberá cumplirse que:

su distancia no dirigida al punto A = (2, 5)
es igual a su distancia no dirigida al punto B = (6, − 1).

O, matemáticamente:

$$\boxed{\qquad} = \boxed{\qquad}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$

$$= \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2}$$

150

Obtenemos:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2}$$

Ecuación que simplificada y escrita en la forma

$$y = mx + b$$

es:

$$\boxed{\qquad}$$

$$(x-2)^2 + (y-5)^2$$
$$= (x-6)^2 + (y+1)^2$$
$$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$$
$$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1$$

$$-4x - 10y + 29$$
$$= -12x + 2y + 37$$

$$8x - 12y - 8 = 0$$

$$2x - 3y - 2 = 0$$

$$-3y = -2x + 2$$

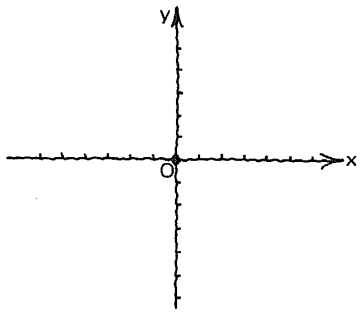
$$\bullet\ y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

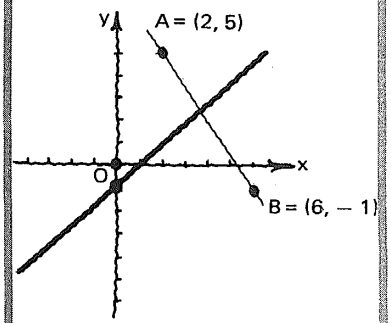
151

Puntos fijos:
(2, 5) y (6, − 1).
Una ecuación del lugar geométrico de los puntos que satisfacen la condición dada:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

Trazar la gráfica.



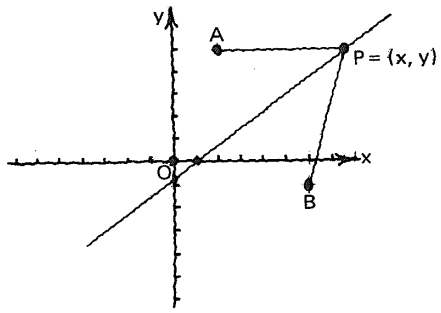


la recta $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$

152

Observamos que
para cualquier punto
de la recta $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$
se verifica que:

$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$



153

Se requiere una ecuación de la bisectriz
del ángulo formado por las rectas:

$x - 2y + 6 = 0$

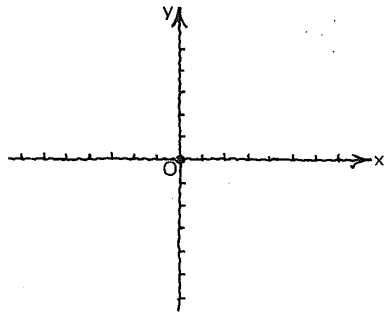
y

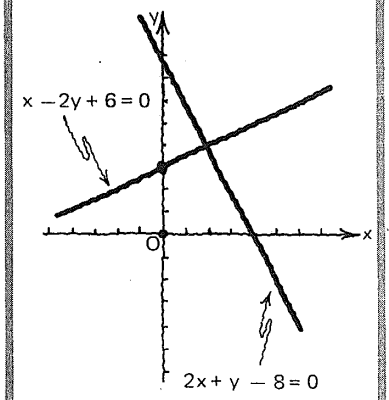
$2x + y - 8 = 0.$

154

Tracemos
las rectas:

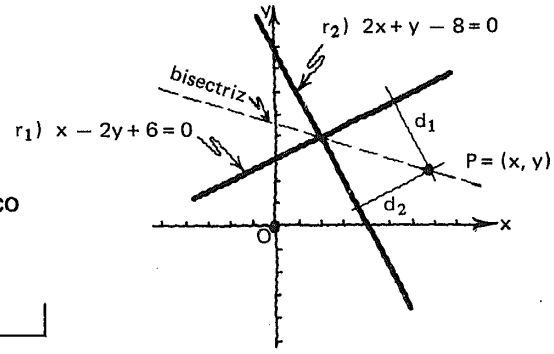
$x - 2y + 6 = 0$
y
$2x + y - 8 = 0.$





155

Para un punto.
P = (x, y)
del lugar geométrico
deberá cumplirse
que:

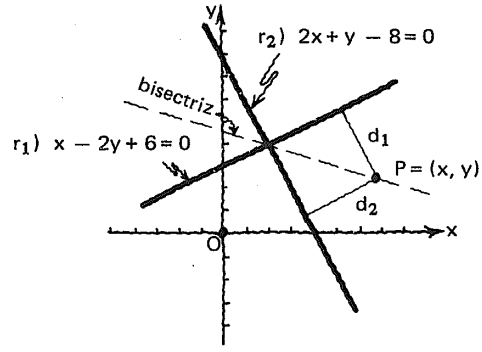


su distancia a la recta
r_1 = su distancia a la
recta r_2
o $d_1 = d_2$

156

Recordemos que:

$d_1 =$

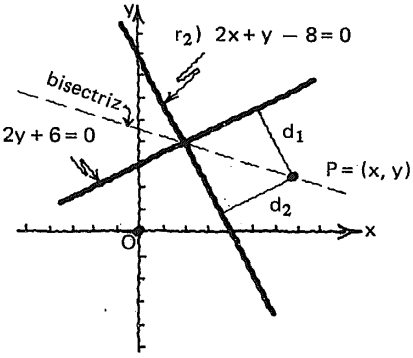


$$\frac{|x-2y+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$
o
$$\frac{|x-2y+6|}{\sqrt{5}}$$

157

$$d_1 = \frac{|x-2y+6|}{\sqrt{5}}$$

$d_2 =$



$$\frac{|2x+y-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$
$$\frac{|2x+y-8|}{\sqrt{5}}$$

158

Obtenemos, entonces, de $d_1 = d_2$:

$$\frac{|x-2y+6|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x+y-8|}{\sqrt{5}}$$

$$|x-2y+6| = |2x+y-8|$$

o en forma más simple:

159

$$|x-2y+6| = |2x+y-8|$$

Si $x-2y+6 \geqslant 0$, entonces $|x-2y+6| =$ $x-2y+6$

Si $x-2y+6 < 0$, entonces $|x-2y+6| =$ $-(x-2y+6) = -x+2y-6$

Si $2x+y-8 \geqslant 0$, entonces $|2x+y-8| =$ $2x+y-8$

Si $2x+y-8 < 0$, entonces $|2x+y-8| =$ $-(2x+y-8) = -2x-y+8$

160

Atención.

$$|x-2y+6| = |2x+y-8|$$

Consideraremos dos casos:

- $x-2y+6$ y $2x+y-8$ del mismo signo.
- $x-2y+6$ y $2x+y-8$ de signo contrario.

161

$$|x - 2y + 6| = |2x + y - 8|$$

Caso 1. $x - 2y + 6 \geqslant 0$ y $2x + y - 8 \geqslant 0$

Una ecuación simplificada expresada en la forma $Ax + By + C = 0$

$$x - 2y + 6 = 2x + y - 8$$

$$-x - 3y + 14 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x + 3y - 14 = 0$$

162

$$|x - 2y + 6| = |2x + y - 8|$$

Caso 2. $x - 2y + 6 \geqslant 0$ y $2x + y - 8 < 0$

Una ecuación simplificada expresada en la forma $Ax + By + C = 0$

$$x - 2y + 6 = -2x - y + 8$$

$$3x - y - 2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$3x - y - 2 = 0$$

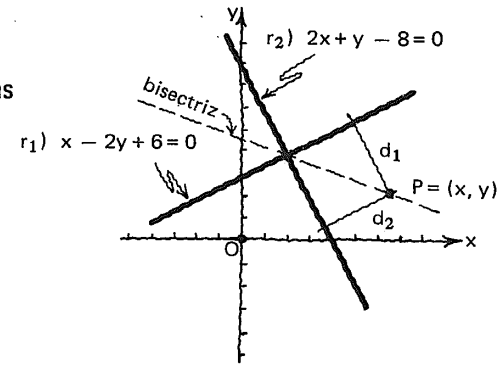
163

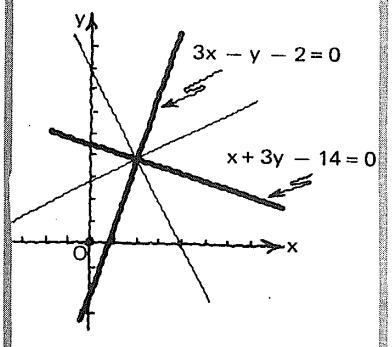
Tracemos las dos rectas obtenidas.

$x + 3y - 14 = 0$

y

$3x - y - 2 = 0$





164

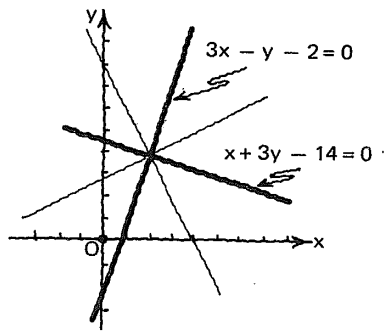
Observamos que
cualquiera de las rectas

$x + 3y - 14 = 0$

ó

$3x - y - 2 = 0$

satisface
la condición enunciada.
Ambas son bisectrices
del ángulo formado por
las rectas dadas.



165

Obtener una ecuación
del lugar geométrico
de los puntos $P = (x, y)$
cuya suma de distancias
a los puntos fijos
$A = (-3, 4)$ y $B = (3, 4)$
sea igual a 8.

166

Para un punto cualquiera $P = (x, y)$
deberá verificarse que

su distancia al punto A
más su distancia al punto
B es igual a 8

ó

$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| = 8$

167

$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| = 8$

$P = (x, y)$
$A = (-3, 4)$
$B = (3, 4)$

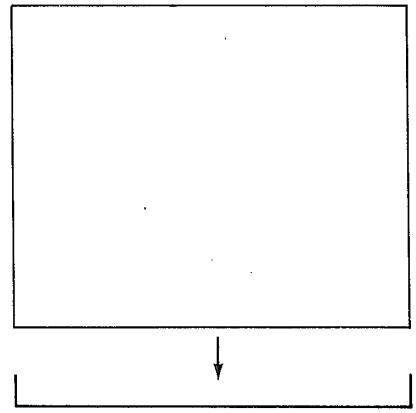
- $\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2}$

$+ \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 8$

168

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 8$

Simplifiquemos la ecuación resultante.



Respuesta en el cuadro siguiente

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2} = 8 - \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 64 - 16\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + (x-3)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 64 - 16\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$12x = 64 - 16\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$64 - 12x = 16\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$16 - 3x = 4\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$

$$(16 - 3x)^2 = 16[(x-3)^2 + (y-4)^2]$$

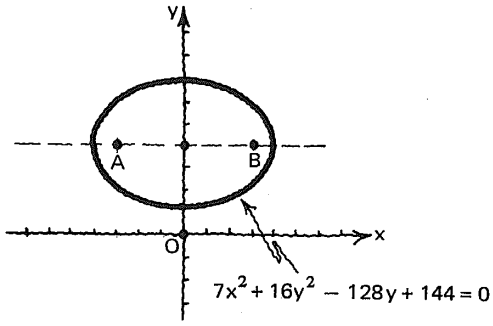
$$256 - 96x + 9x^2 = 16(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16)$$

$$256 - 96x + 9x^2 = 16x^2 - 96x + 144 + 16y^2 - 128y + 256$$

$$7x^2 + 16y^2 - 128y + 144 = 0$$

ó $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{7} = 1$

El lugar geométrico es una elipse horizontal con centro en (0, 4), semieje mayor = 4, y semieje menor = $\sqrt{7}$.



6.8.5.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.8.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* una ecuación de un lugar geométrico, a partir de las condiciones que debe satisfacer uno cualquiera de sus puntos.

8.6

Gráfica de una desigualdad

170

La gráfica de

$$R_1 = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge \mathbf{y = mx + b}\}$$

$m, b \in \mathcal{R}$

es una [ ]
en que
m es [ ]
y
b es [ ]

recta

pendiente

ordenada al origen

171

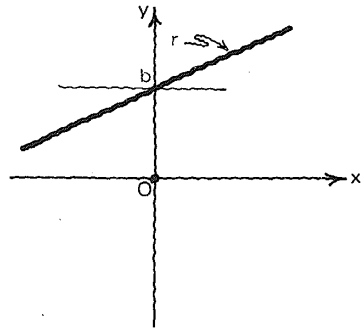
Si la recta r
es la representación
gráfica de

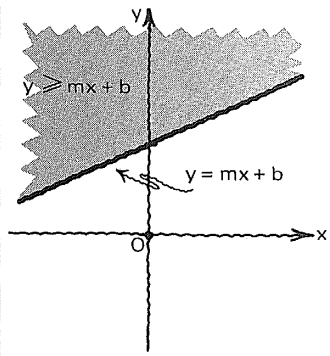
$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y = mx + b\}$

hacer la representación
gráfica de

$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge \mathbf{y \geqslant mx + b}\}$

$m, b \in \mathcal{R}$



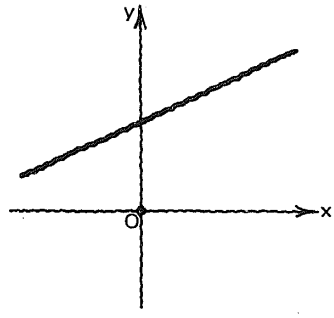


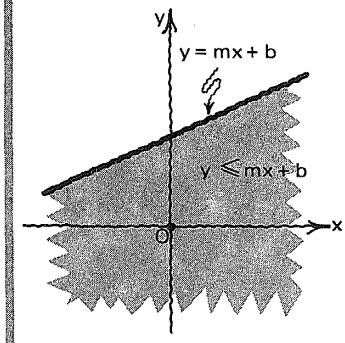
172

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y \leqslant mx + b\}$$

$m, b \in \mathcal{R}$



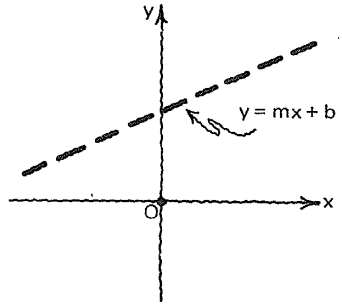


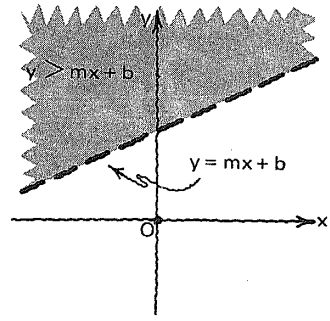
173

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y > mx + b\}$$

$m, b \in \mathcal{R}$



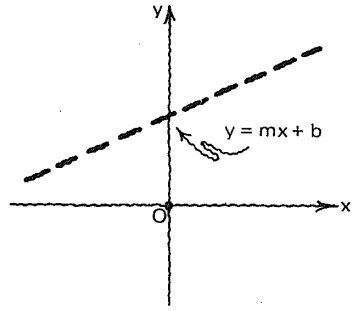


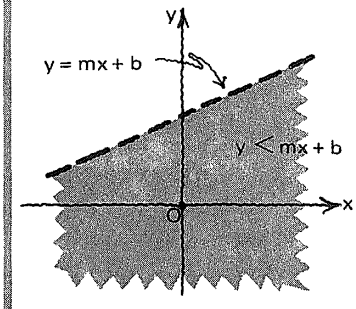
174

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge y < mx + b\}$$

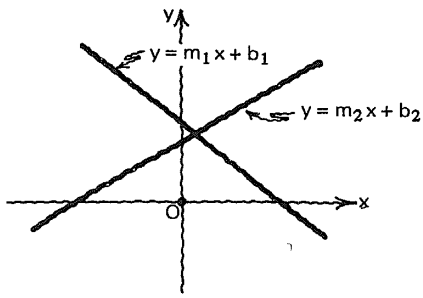
$m, b \in \mathcal{R}$



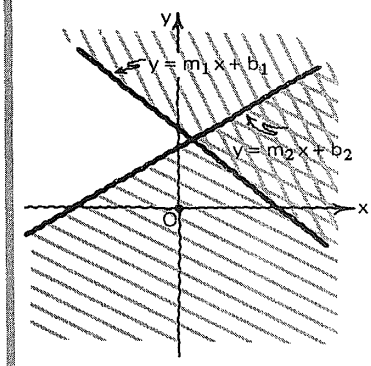


175

Representación gráfica de



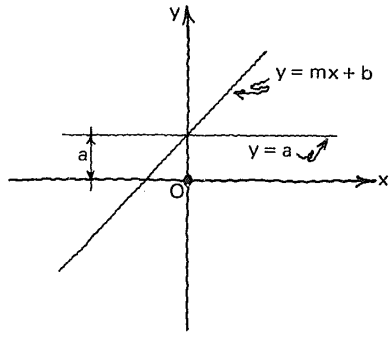
$$\left\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge \mathbf{y \geqslant m_1 x + b_1}\right\}$$
$$\cap\left\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge \mathbf{y \leqslant m_2 x + b_2}\right\}$$
$m_1, b_1 \in \mathcal{R} \qquad m_2, b_2 \in \mathcal{R}$

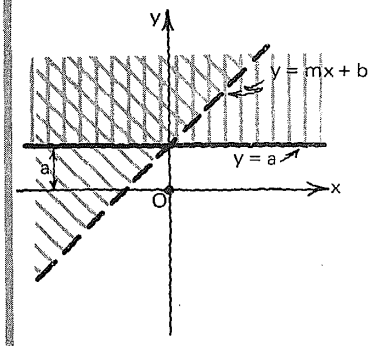


176

Representación gráfica de

$$\left\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R} \wedge \mathbf{y > mx + b}\right\} \cup$$
$m, b \in \mathcal{R}$
$$\left\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge \mathbf{y \geqslant a}\right\}$$
$a \in \mathcal{R}$

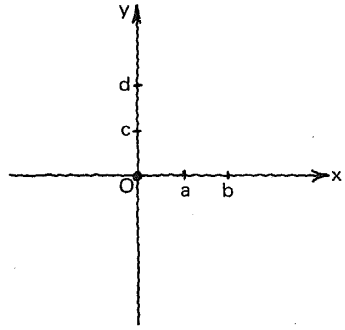


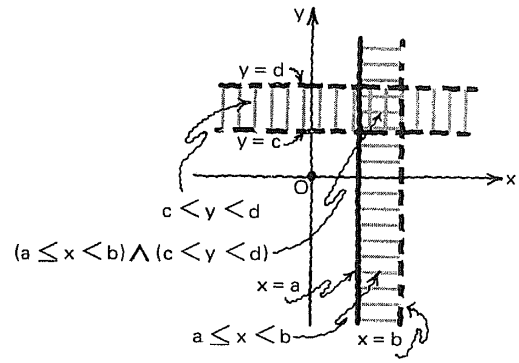


177

Representación gráfica de

$$\left\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \; a \leqslant x < b \wedge c < y < d\right\}$$
$a, b, c, d \in \mathcal{R}$

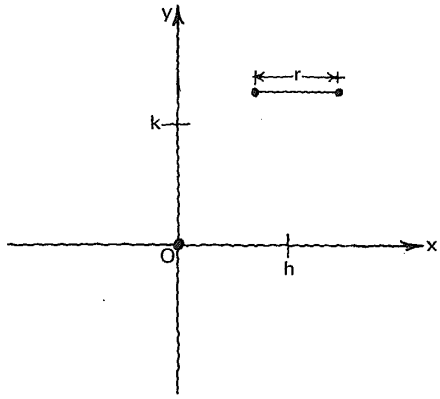


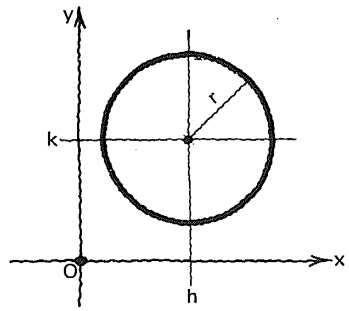


178

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$



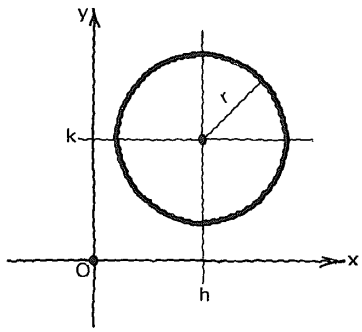


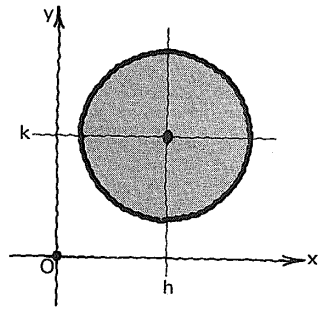
179

Atención.

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge (x-h)^2 + (y-k)^2 \leqslant r^2\}$$

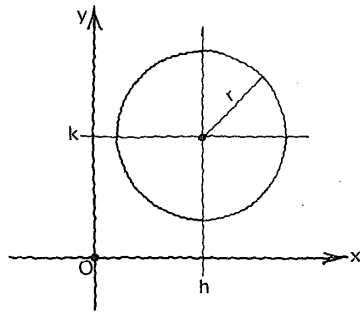


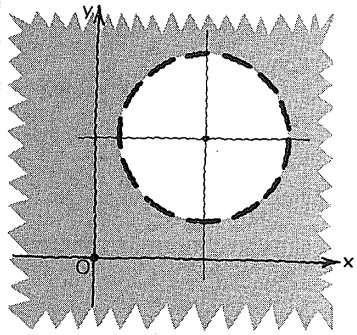


180

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}^2 \wedge (x-h)^2 + (y-k)^2 > r^2\}$$



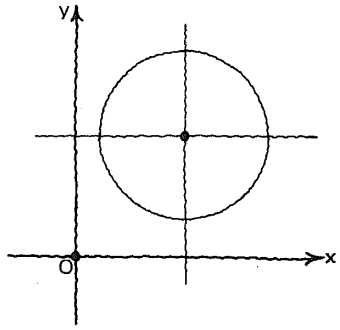


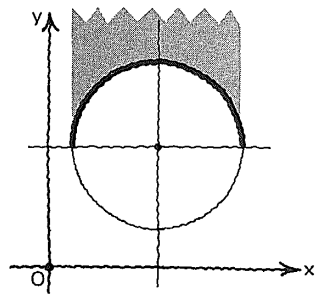
181

Atención.

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge h - r \leqslant x \leqslant h + r \wedge y \geqslant k + \sqrt{r^2 - (x - h)^2}\}$$

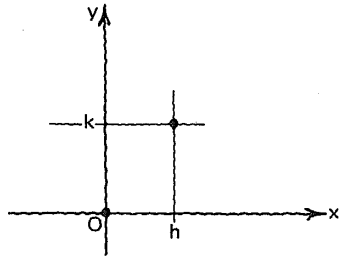


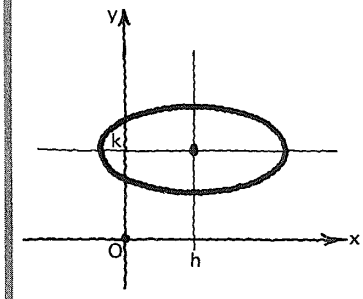


182

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1\}$$

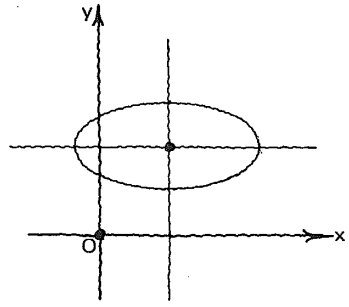


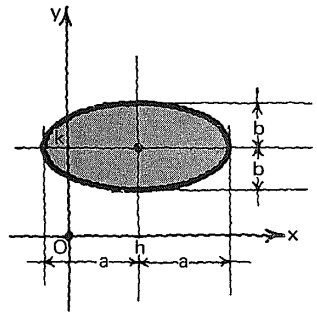


183

Representación gráfica de

$$\{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge h - a \leqslant x \leqslant h + a \wedge \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} \leqslant 1\}$$





6.8.6.1

Práctica adicional de
representación gráfica
de una desigualdad,
si se considera necesario.

6.8.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *hacer* la representación gráfica de una relación cuya regla de correspondencia es una desigualdad de primero o segundo grado en x e y;
- *hacer* la representación gráfica de la unión o intersección de dos relaciones cuyas reglas de correspondencia son desigualdades de primero o segundo grado en x e y.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de agosto de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100

Bloque 6:

Geometría analítica

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

Bloque	Módulo	Módulo de resumen
1 **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café**	*1- Conjuntos* *2- Estructuras matemáticas* *3- El conjunto de los enteros* *4- Operaciones con enteros* *5- Lenguaje algebraico 1. Formación* *6- Lenguaje algebraico 2. Transformación* *7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división* *8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables* *9- Operaciones con polinomios 3. Factorización* *10- El conjunto de los racionales* *11- Operaciones con expresiones racionales* *12- El conjunto de los reales* *13- Operaciones con expresiones reales* *14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones*	***MEMO 1*** *ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES*
2 **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde**	*1- La ecuación como modelo matemático* *2- Ecuaciones de primer grado* *3- Sistemas de ecuaciones de primer grado* *4- Desigualdades de primer grado* *5- Ecuaciones de segundo grado* *6- Desigualdades de segundo grado* *7- La relación como modelo matemático* *8- Funciones* *9- Funciones exponenciales* *10- Funciones logarítmicas* *11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas* *12- Resolución de problemas*	***MEMO 2*** *ÁLGEBRA. MODELOS*
3 **NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA** **Libros color azul**	*1- Lógica proposicional 1. Proposiciones* *2- Lógica proposicional 2. Argumentos*	***MEMO 3*** *NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA*
4 **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo**	*1- Conjuntos de puntos* *2- Relaciones binarias* *3- Figuras planas* *4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos* *5- Polígonos convexos* *6- Relación de semejanza* *7- Geometría métrica en el plano* *8- Cuerpos geométricos*	***MEMO 4*** *GEOMETRÍA EUCLIDIANA*
5 **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre**	*1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo* *2- Resolución de triángulos rectángulos* *3- El círculo trigonométrico* *4- Las funciones trigonométricas* *5- Las funciones trigonométricas inversas* *6- Identidades trigonométricas* *7- Resolución de triángulos cualesquiera* *8- Ecuaciones trigonométricas*	***MEMO 5*** *TRIGONOMETRÍA*
6 **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado**	*1- Introducción a la geometría analítica* *2- La recta* *3- La circunferencia* *4- La elipse* *5- La hipérbola* *6- La parábola* *7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado* ***8- Relaciones y lugares geométricos***	***MEMO 6*** *GEOMETRÍA ANALÍTICA*
7 **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa**	*1- Introducción al cálculo diferencial* *2- Límite de una función* *3- Continuidad de una función* *4- Derivación de funciones algebraicas* *5- Derivación de funciones trascendentes* *6- Extremos de una función (máximos y mínimos)*	***MEMO 7*** *CÁLCULO DIFERENCIAL*
8 **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro**	*1- Sumatoria y notación sigma* *2- La integral definida y la integral indefinida* *3- Integrales elementales* *4- Métodos de integración 1* *5- Métodos de integración 2* *6- Algunas aplicaciones del cálculo integral*	***MEMO 8*** *CÁLCULO INTEGRAL*

ISBN 968-24-0839-3